Le basi del metodo sperimentale
– un'introduzione pratica –

G. D'Agostini
Dipartimento di Fisica, Università "La Sapienza", Roma

1 febbraio 2001

Indice

Appendice A

Appendice critica

Questa appendice è scritta per venire incontro a quanti avessero incontrato precedentemente altri approcci alla valutazione delle incertezze ("degli errori") di misura o che possano incontrarli nel seguito in altri corsi o nell'attività di ricerca. Essa contiene una critica ai "metodi convenzionali", ovvero quelli ancora maggiormente in voga nella maggior parte delle università.

A.1 Valutazioni usuali delle incertezze

Vediamo ora quali sono le tecniche di valutazione delle incertezze ("errori") usate dalla maggior parte dei laureati in materie scientifiche e tuttora insegnate nelle scuole secondarie superiore e anche all'Università (si noti come alcuni metodi variano leggermente a seconda dell'Università di provenienza; nel seguito si fa riferimento a quello che, grosso modo, rappresenta lo standard romano).

Cominciamo esaminando attentamente la seguente lista di nozioni tipiche. Esse saranno analizzate in dettaglio nei prossimi paragrafi. Questa lista era stata originariamente elaborata per l'introduzione ad una serie di seminari tenuti alla fine del 1996 ad insegnanti dell'AIF e serviva a valutare il background comune.

1. **"Propagazione degli errori massimi"**:

$$\Delta y \approx \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \dots \tag{A.1}$$

   ad esempio

$$y = x_1 \pm x_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

2. **"Propagazione degli errori statistici"**:

$$\sigma^2(y) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma^2(x_2) + \dots \tag{A.2}$$

   ad esempio

$$y = x_1 \pm x_2 \quad \Rightarrow \quad \sigma(y) = \sqrt{\sigma^2(x_1) + \sigma^2(x_2)}$$

3. **Regola della "mezza divisione"**:

$$\Delta x = \frac{1}{2}\text{ divisione} \tag{A.3}$$

4. I punti sperimentali vanno riportati sui **grafici sempre con le "barre di errore"**.

5. **Rette di massima e di minima pendenza**.

6. Avendo eseguito un numero n "abbastanza grande" di misure, il **risultato** va riportato come

$$\mu \stackrel{?}{=} \overline{x} \pm \sigma \tag{A.4}$$

oppure

$$\mu \stackrel{?}{=} \overline{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{A.5}$$

Inoltre, molto importante:

che significato si attribuisce a queste due espressioni?

Il <u>risultato</u> del sondaggio (confermato sostanzialmente in altri seminari e corsi di perfezionamento) è stato che:

- i partecipanti conoscevano molto bene questi concetti, con eccezione del punto 2;
- per quanto riguarda il punto 3, alcuni mostravano addirittura una preferenza ad una stima dell'incertenza più conservativa ($\Delta x = 1$ divisione);
- sulla scelta fra $\pm\sigma$ e $\pm\sigma/\sqrt{n}$, c'era una netta preferenza ad utilizzare come incertezza il valore della deviazione standard delle singole misure anziché dividerlo per $\sqrt{n}$ ("altrimenti diventa troppo piccolo"). Comunque, a parte il numero da mettere nell'espressione, c'era l'unanime consenso che l'espressione stesse a significare "una certa probabilità che μ sia compreso nell'intervallo".

A.2 Critica della "teoria degli errori massimi"

Passiamo ora in rassegna i concetti e le procedure che abbiamo illustrato, cercando di capire su cosa sono fondate e cosa implicano.

A.2.1 $\Delta y = \sum_i \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right| \Delta x_i$

Questa espressione starebbe a significare che

> se siamo "praticamente certi" che il valore vero x_{v_i} è compreso nell'intervallo dato da $x_i \pm \Delta x_i$, ne segue che siamo "praticamente certi" che il valore vero di y_v è compreso nell'intervallo dato da $y \pm \Delta y$.

È opinione comune che, affinché la formula sia valida, debba valere $\Delta x_i \ll x_i$ (giustificazione usuale). Se accettiamo per buona tale espressione di "propagazione lineare degli errori massimi" e i presupposti sui quali essa si basa andiamo incontro ad incongruenze, come mostrano gli esempi che seguono.

1. Se $x_1 = 0.0 \pm 0.5$ e $x_2 = 0.5 \pm 0.5$ quanto vale $\Delta(x_2 - x_1)$? (La seconda condizione non è più valida.)

2. Misuriamo due spessorini, uno di 1 mm e l'altro di 2 mm (valori "esatti"), con un righello aventi divisioni di 1 mm. Otteniamo $x_1 = 1.0 \pm 0.5\,\text{mm}$ e $x_2 = 2.0 \pm 0.5\,\text{mm}$, da cui $x_2 - x_1 = 1 \pm 1\,\text{mm}$. Come si recita in questi casi, le due misure sono "uguali entro gli errori". Ciò nonostante, una qualsiasi ispezione visuale suggerisce che uno spessore è circa il doppio dell'altro. Nessuno potrà giurare che il rapporto fra i due sia esattamente 2: potrebbe essere 1.8, 1.9, 2.0, 2.1, 2.2, o forse 1.7 o 2.3, ma sicuramente sono esclusi i valori prossimi a 1. Si ottiene quindi un risultato formale in netta contraddizione con quanto si crede: una conclusione paradossale!

3. Consideriamo un termometro a mercurio, avente divisioni di 0.1°C e di cui sappiamo che potrebbe essere scalibrato al più di 0.6°C. Consideriamo le seguenti letture, lasciando sospese le incertezze e le successive elaborazioni:

$$T_1 = 22.00\ldots \pm \ldots\ {}^\circ\text{C} \tag{A.6}$$
$$T_2 = 23.00\ldots \pm \ldots\ {}^\circ\text{C} \tag{A.7}$$
$$T_2 - T_1 = \ldots \pm \ldots\ {}^\circ\text{C} \tag{A.8}$$

   La risposta usuale a questo quesito è che Δ_{T_1} e Δ_{T_2} sono pari a 0.6°C, mentre
$$T_2 - T_1 = 1.0 \pm 1.2\,{}^\circ\text{C}\,.$$
   (Qualcuno, sospettando un tranello, azzarda un $\Delta(T_2 - T_1) = 0.6\,{}^\circ\text{C}$.) Non è difficile convincersi che, mentre incertezze di 0.6 °C su ciascuna misura sono ragionevoli, se intese come "errori massimi", quella sulla differenza non è affatto sensata. La calibrazione assoluta non può avere alcun effetto sulla differenza fra valori di temperatura così prossimi. Alla luce delle considerazioni del punto precedente, possiamo affermare che la stima più ragionevole dell'incertezza su $T_2 - T_1$ sia inferiore a 0.1°C (per arrivare ad valore numerico bisognerà premettere altre considerazioni e saperne di più sul <u>termometro</u>, sulle <u>condizioni</u> di misura e su <u>chi</u> ha eseguito le letture).

4. Torniamo ora all'espressione "praticamente sicuri":
   - cosa significa?
   - cosa si paga se non è vero (se dovesse risultare che il valore vero è al di fuori dell'intervallo indicato, o almeno "molto al di fuori", visto che non si trattava di certezza assoluta)?
   - è quello che serve veramente?

Analizziamo quest'ultimo punto. Prendiamo, come esempio, la somma di tante grandezze di uguale valore e incertezza (tanto per semplificare i conti):

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= \underline{\text{costante}} = \Delta x \\ x_i &= \underline{\text{costante}} = x\end{aligned}$$

La somma degli n valori e la sua incertezza, calcolata usando la (A.1), sono

$$\begin{aligned}y_n &= \sum_{i=1}^{n} x_i = nx \\ \Delta y_n &= \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = n\Delta x\end{aligned}$$

Confrontiamo questo risultato con quanto si ottiene mediante un piccolo programma di simulazione[1], assumendo che il valore vero delle x_i potrebbe essere in qualsiasi punto entro l'intervallo $x_i \pm \Delta x_i$. La figura A.1 mostra i risultati di 10000 simulazioni, per n=1, 2, 3, 5, 10, 20 e 50. Per comodità l'asse delle ascisse è preso fra $y_n - \Delta y_n$ e $y_n + \Delta y_n$ dati dalla formula precedente. Come si vede dalla figura, è senz'altro corretto affermare di essere "praticamente certi" che il risultato sia in quell'intervallo, ma, al crescere di n, la prudenza è tale che il risultato si è "impoverito" rispetto alle sue potenzialità originarie.

Si potrebbe obiettare che in pratica si fanno solo poche misure. Questo può essere vero in una semplice esperienza di laboratorio, ma nel mondo reale la propagazione delle incertezze è in principio illimitata: ognuno utilizza informazioni precedentemente ricavate da lui o da altri, e le conclusioni verranno utilizzate da altri ancora, etc. (nessuno fa una misura per incorniciare il risultato a casa, senza nessuna influenza per altri[2]...).

Riassumendo, possiamo affermare che l'uso della cosiddetta *"teoria" degli errori massimi* conduce a

- una tendenza a <u>sovrastimare</u> le incertezze;
- all'impossibilità di trattare propriamente gli effetti delle <u>correlazioni</u>.

Ora, qualcuno potrebbe pensare che l'effetto delle correlazioni possa essere una finezza e che la sovrastima delle incertezze sia da ritenere addirittura essere un pregio. Se gli esempi precedenti, che hanno mostrato come facilmente si arriva a sovrastime di un ordine di grandezza non dovesse bastare, citiamo la *Guida* ISO in proposito:

[1]Non ci sarebbe alcun bisogno di simulare il processo al computer, dato che la soluzione può essere ottenuta analiticamente mediante il calcolo delle probabilità, ma l'esperienza mi insegna che le simulazioni possono essere più convincenti per alcune persone.

[2]Ci si potrebbe chiedere: come mai questo processo non porta ad un collasso? Semplicemente perché nei laboratori non si seguono queste regole e, invece di nascondere la testa nella sabbia degli errori massimi, si cerca di ricalibrare in continuazione strumenti e procedure. Questo è quanto dovrebbe imparare subito anche lo studente

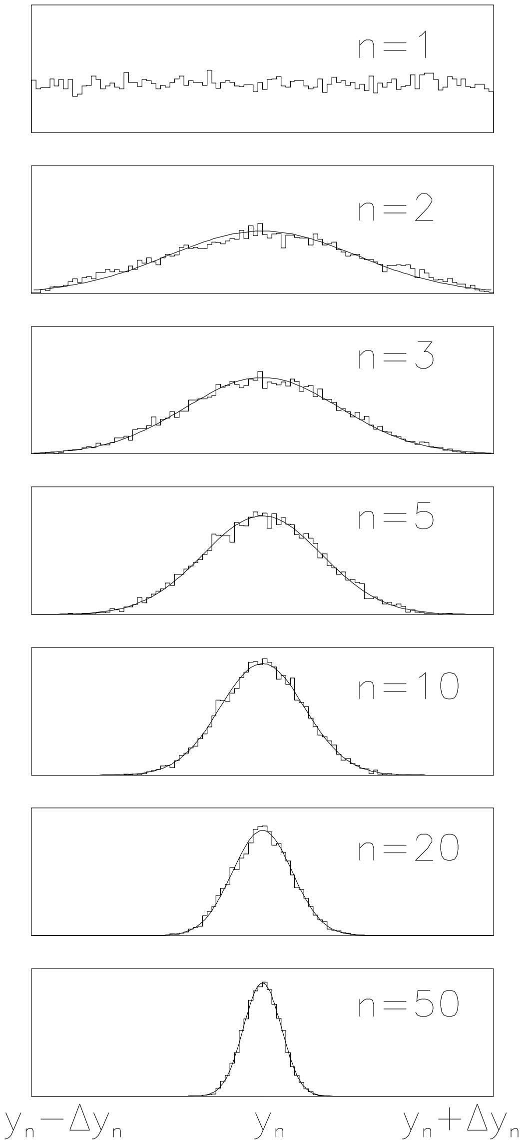

Figura A.1: Simulazione della distribuzione del valore vero ottenuta sommando n risultati aventi gli stessi limiti di errore. Per confronto viene anche riportata la distribuzione normale avente come media il centro dell'intervallo e deviazione standard $\sqrt{n}/\sqrt{12}$ (vedi appendice sul teorema del limite centrale).

> "The method [*quello raccomandato dalla Guida*] stands, therefore, in contrast to certain older methods that have the following two ideas in common:
>
> - The first idea is that the uncertainty reported should be 'safe' or 'conservative' (...) In fact, because the evaluation of the uncertainty of a measurement result is problematic, it was often made deliberately large.
> - ...
>
> (...) if the 'maximum error bound' (the largest conceivable deviation from the putative best estimate) is used (...) the resulting uncertainty (...) will be unusable by anyone wishing to incorporate it into subsequent calculations (...)".

Comunque, il motivo principale per cui vanno evitate le sovrastime delle incertezze è che in questo caso è più facile arrivare a risultati in accordo (artificiosamente) con valori noti o con quelli di altri esperimenti. Questo impedisce di identificare i possibili effetti sistematici che possono distorcere il risultato (si ricordi che spesso dietro gli errori sistematici c'è quasi sempre della Fisica: dispersioni termiche, rumore elettromagnetico, approssimazioni rozze, etc.), o di scoprire addirittura una nuova fenomenologia (ma questo non capita nelle esperienze di laboratorio didattico...). Aumentare artificiosamente le incertezze equivale a rifiutarsi di imparare. Farlo per "paura di sbagliare" è puerile[3].

A.2.2 Regola della mezza divisione

Questa è una delle regole più radicate nella mente di chi ha seguito corsi tradizionali di teoria della misura, una sorta di dogma al quale credere, scarsamente supportato (se preso alla lettera) da giustificazioni teoriche o pratiche. In realtà è abbastanza semplice convincersi che:

- $\Delta x = \frac{1}{2}$ divisione <u>non corrisponde all'errore di lettura</u>[4]: provare per credere! Ad esempio, una semplisissima esperienza consiste nel fare delle misure con un calibro e confrontare il valore stimato interpolando fra le tacche (distanziate un millimetro) con quello letto sul nonio (vedi tabella 2.2 in Appendice). Il risultato che si ottiene è ben lontano da un errore di mezza divisione. Si notano scarti tipici al più dell'ordine di un decimo di divisione e la deviazione standard tipica degli scarti interpolazione-nonio è inferiore al decimo di divisione, con un massimo di frequenza intorno a ≈ 0.7 <u>decimi</u>, un valore niente affatto casuale alla luce di quanto vedremo fra breve.

[3] Questo aspetto psicologico non riguarda soltanto gli studenti. Non è raro vedere anche nella ricerca avanzata risultati in sorprendente accordo fra di loro o con predizioni teoriche nonostante le loro enormi barre di incertezza, o fisici sperimentali preoccupati se i loro valori differiscono di un paio di deviazioni standard da una "solida predizione" o da un risultato precedente.

[4] A volte lo si sente chiamare anche **errore di sensibilità**, o addirittura semplicemente "sensibilità" (in una nota per studenti si legge testualmente: "l'indeterminazione su tali grandezze può essere presa pari alla sensibilità del termometro impiegato, ovvero mezza tacca"). In questo caso "sensibilità" starebbe per "risoluzione" (vedi capitolo 8). È raccomandabile utilizzare il termine "sensibilità" per indicare ...la sensibilità, ovvero, detto alla buona, "il rapporto fra la variazione della risposta e la variazione dello stimolo".

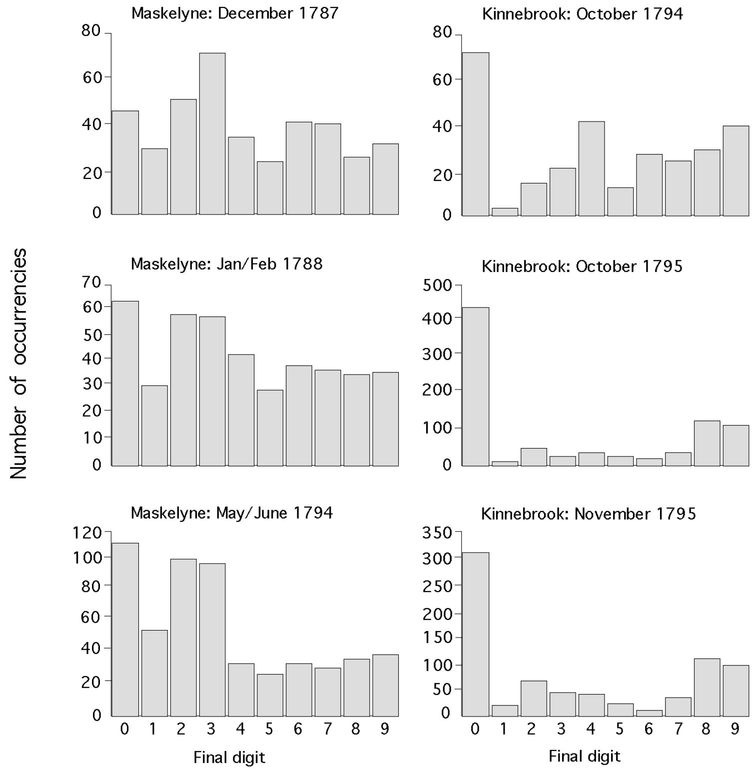

Figura A.2: Istogramma dell'ultima cifra significativa nei dati di Maskelyne e in quelli del suo assistente.

In effetti, questo è in linea con la tradizione classica (tuttora in voga in giro per il mondo) che raccomanda di sforzarsi di leggere fra le divisioni. Mostriamo, come curiosità, una figura tratta da un articolo su *Nature* (del 14 marzo 1996, Vol. 380, pag. 101) sull'astronomo Nevil Maskelyne. Questi licenziò il suo assistente, accusandolo di non essere accurato nelle letture (qualcuno insinua che questo non sia stato il motivo principale, ma per noi è irrilevante). La figura A.2 riporta la distribuzione dell'ultima cifra (ovvero quella stimata interpolando fra le tacche) delle misure di Maskelyne e del suo assistente. Si noti come anche quest'ultimo abbia una certa tendenza ad arrotondare un po' troppo, o a predilire certe cifre, ma niente a che vedere con la superficialità di Kinnebrook.

È interessante vedere cosa raccomandano le varie norme degli istituti di metrologia a proposito degli strumenti a lettura analogica.

- "Line scales mainly have a scale numbering with regular spacing and are mostly intended for a continuous indication of measured values". (DIN 1319, part 2, 6.1.1) [Per "continuo" si intende che la quantizzazione della lettura alla mezza divisione è arbitraria.]
- "Unduly small scale spacing (less than approx. 0.7 mm) should be avoided, since such scales are tiring to read and in particular the estimating of tenths is impossible so that the observation is rendered less certain." (DIN 1319, part 2, 6.3)

- "In some areas of metrology the term "resolution" is used. This is understood to mean the small change in the value of the measurand which is necessary to produce a perceptible (often specified) small change in the response (in the case of measuring instruments with scale indication, for example, 1/5 of the scale interval)". (DIN 1319, part 2, 9)
- "In un formato per osservatore umano l'incertezza di lettura dipende dalle caratteristiche costruttive della scala e dell'indice, dalle modalità d'osservazione, dal rumore eventuale e dall'abilità dell'osservatore. Per esempio se si ammette che un osservatore di normale abilità, leggendo lo strumento nella posizione appropriata, possa stimare 1/5 di divisione, si indicherà come incertezza di lettura ± 0.1 divisioni."[5] (UNI 4546, 5.5)

Ne segue che, quando le condizioni di misura lo permettono, bisogna sforzarsi a leggere fra le tacche[6].

- $\Delta x = \frac{1}{2}$ divisione non corrisponde all'errore di calibrazione (si sente ripetere spesso "il costruttore ha disegnato le tacche in modo tale che …"). Per convirsene, è sufficiente leggere le norme (ISO, DIN, UNI) a cui i costruttori di strumenti si devono attenere. Si scopre allora come il possibile errore di calibrazione possa essere, in taluni casi, ben inferiore al decimo di divisione (nel caso dei righelli, per esempio), mentre in altri si arriva addirittura ad alcune divisioni (il caso di alcuni termometri). Ad esempio, la norma su *"Attrezzi da disegno - Modalità di controllo e precisione per squadre, righe e multidecimetri"* (UNI 5131) riporta:

  - *Sulla lunghezza l della parte millimetrata è ammessa una tolleranza di*
  $$\pm\frac{0.20\,l}{1000}\,.$$

  Quindi per i normali righelli abbiamo tolleranze di circa ± 0.1 mm per letture fatte a fondo scala (ed, in ogni caso, le letture prossime sono necessariamente correlate, in quanto un eventuale difetto dello strumento si ripercuote in entrambe).

Un ultimo commento sulla regola della mezza divisione: essa implicherebbe che

- questo sia il solo errore in gioco, mentre, come visto precedentemente, sono molte le cause di incertezza e molto spesso lo sperimentatore fa parte integrante del processo di misura;
- i vari errori siano non correlati (per quanto riguarda il successivo uso nelle propagazioni).

Da questa regola discende inoltre l'imperativo di riportare i punti sperimentali sui grafici sempre con le loro "barre di errore", che sarà commentato fra breve.

[5]Essere praticamente sicuri che il valore sia entro il 1/5 di divisione, vuol dire che, se ci si sforza al interpolare al meglio, ci si aspetta una deviazione standard dell'errore di lettura di circa $0.2/\sqrt{12}$ divisioni, compatibile al valore di ≈ 0.7 che si osserva sperimentalmente.

[6]**Perché non cambiare strumento?** Domanda legittimissima. Il problema è che questo non è sempre possibile. Quindi è importante, all'occorrenza, imparare a sfruttare tutta la potenzialità degli strumenti a disposizione. Queste dovrebbero essere le **regole del gioco** sulle quale sviluppare un corso di teoria e pratica di valutazione delle incertezze di misure.

A.2.3 $\Delta t = 0.2\,$s?

Accenniamo rapidamente ad un'altra regola non giustificata. Si dice spesso che l'errore dovuto nelle misure di cronometraggio manuale sia di due decimi di secondo, dovuto ai riflessi umani.

Anche se è vero che il tempo medio di riflesso è di circa 0.2 s (intorno a 180 ms per studenti mediamente svegli) questo non ha niente a che vedere con l'errore sulla misura di cronometraggio. Questo dipende invece dall'entità delle fluttuazioni rispetto al ritardo medio: se, per assurdo, il dito di uno studente rispondesse anche 1 secondo dopo lo stimolo, ma senza fluttuazioni, l'errore sarebbe nullo. Quindi, ancora una volta la misura dipende dalla persona (ci aspettiamo che Max Biaggi si comporterà meglio di qualsiasi vincitore di premio Nobel...) e dalle condizioni di misura. Nella prima parte del Laboratorio Virtuale sono state proposte alcune esperienze per permettere a ciascuno di valutare le proprie prestazioni. Effettuandole si potranno osservare errori tipici di alcuni <u>centesimi</u> di secondo[7].

A.2.4 Imperativo categorico di riportare le "barre di errore"

Nessuno mette in dubbio l'importanza di riportare sui grafici i valori misurati con le relative barre di incertezza. Il solo problema è che queste barre dovrebbero essere veramente associate ad una incertezza, in modo consistente con la sua definizione. Purtroppo questo non è vero se, come succede spesso:

- si utilizza la regola della mezza divisione come punto di partenza;
- le incertezze su grandezze misurate indirettamente vengono valutate con la propagazione lineare delle incertezze.

Anche se si facesse uso di altri criteri e procedure meno criticabili, sia per l'incertezza dovuta allo strumento che per la legge di propagazione, partire da tali incertezze implica trascurare altri fattori che intervengono nell'incertezza e che possono essere più importanti di quella di lettura e di eventuale calibrazione dello strumento.

Quello che si fa generalmente nel mondo della ricerca è riportare sul grafico semplicemente i punti osservati e valutare l'incertezza dalla dispersione dei dati (*"residui"*), lungo un andamento noto (o ipotizzato) dei dati sperimentali. La figura A.3 mostra due grafici relativi al comportamento di una bilancia di altissima precisione, pubblicati da T. Quinn[8], direttore del BIPM (tanto per prendere un ricercatore al di sopra di ogni sospetto...).

A.2.5 Rette di massima e minima pendenza

Anche la procedura di stimare i parametri di un andamento lineare dalle cosiddette rette di massima e minima pendenza è un derivato della "teoria degli

[7] Si noti inoltre che, quando si misura una grandezza fisica (X) in funzione del tempo (t), non ha molto senso parlare di errori su t e su X, in quanto ogni differenza dell'istante di lettura dal tempo nominale si rifletterà in un errore sulla grandezza fisica. Quindi, ai fini del risultato finale, è più che ragionevole attribuire tutto l'errore a X e considerare t esente da errore (si veda anche il paragrafo 10.5.2).

[8] T.J. Quinn, *"The beam balance as an instrument for very precise weighing"*, Meas. Sci. Technol., **3**(1992), 141.

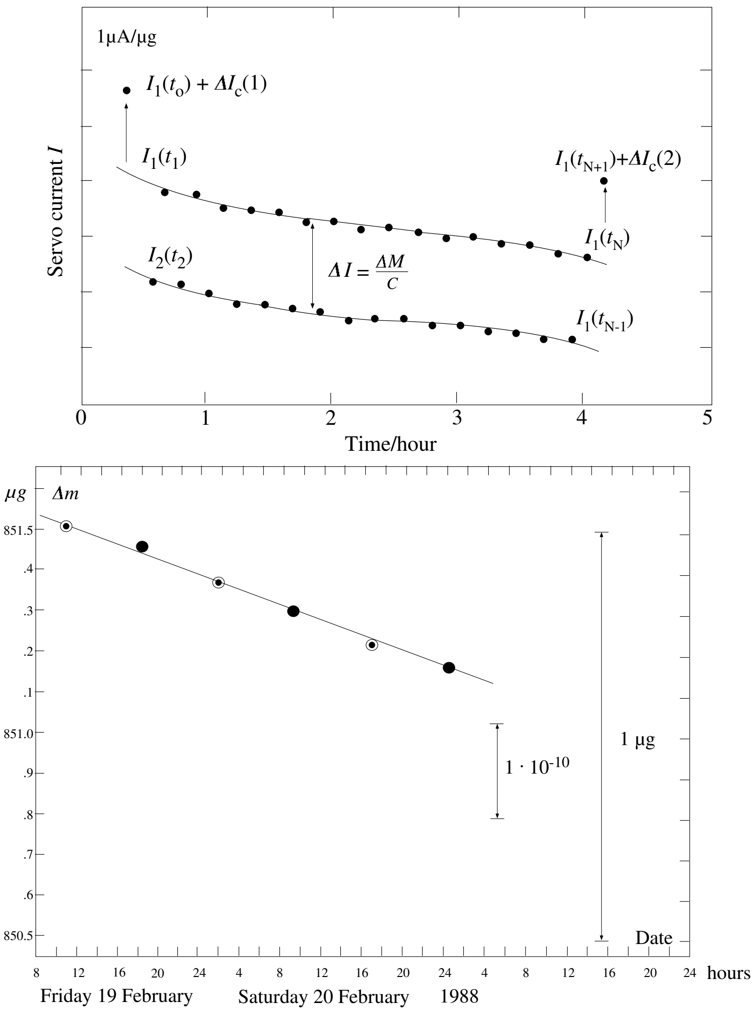

Figura A.3: Grafici relativi ad una bilancia di altissima precisione (deviazione standard di 4 parti su 10^{12}) pubblicati dal direttore del BIPM: si noti l'assenza delle barre di incertezza.

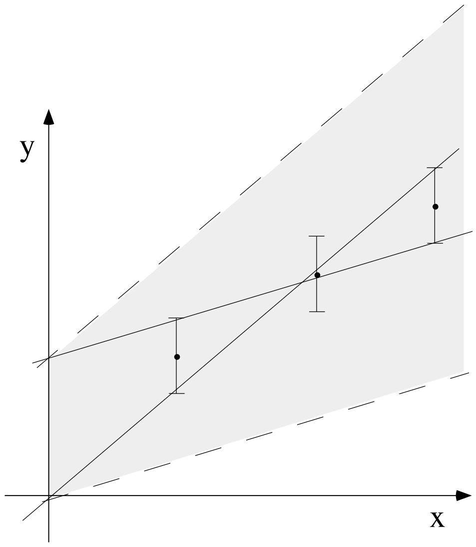

Figura A.4: Regione di plausibilità della legge fisica che descrive i dati sperimentali, come risulta dal risultato dato secondo la procedura delle rette di massima e minima pendenza.

errori massimi", ove l'intervallo di valori fra le barre è considerato certo. Da questo punto di vista c'è almeno una certa coerenza logica in quello che, alla luce dell'esperienza, si rivela come un paradosso che infastidisce gli studenti:

- peggiore è l'accordo fra i punti sperimentali (con le loro barre di incertezza), migliore (e spesso in modo imbarazzante, alla luce di valori veri noti) è la precisione sui parametri.

A questo è da aggiungere che:

- il risultato simultaneo dei due parametri è spesso "non informativo", nel senso che si presta ad interpretazioni molto vaghe e non accettabili alla luce dei dati sperimentali. Infatti, nel presentare un risultato con

  $$\begin{cases} m = m_\circ \pm \Delta m \\ c = c_\circ \pm \Delta c \end{cases}$$

  (m e c stanno rispettivamente per coefficiente angolare e intercetta) si perdono informazioni: chi non ha accesso al grafico può immaginare un andamento vero che può essere compreso, senza alcuna preferenza, fra

  $$y = (m_\circ - \Delta m)x + (c_0 - \Delta c)$$

  e

  $$y = (m_\circ + \Delta m)x + (c_0 + \Delta c)\,.$$

  Questo corrisponde, in alcune esperienze didattiche ad aver misurato più o meno niente (vedi ad esempio figura A.4).

- Il risultato dipende dalla scelta degli assi e non è invariante per traslazione. Ad esempio, la regione di plausibilità si riduce se si sceglie l'origine dell'asse delle ascisse al centro dei punti. In particolare, con un po' di fortuna (o di sfortuna?) si può ottenere $\Delta c = 0$! Questo è dovuto al fatto che con questa procedura non c'è alcun modo di tener conto delle correlazioni fra i parametri, correlazioni inevitabili in quanto essi sono ottenuti dalle stesse informazioni di partenza.

A.3 Critica degli "errori statistici"

L'altra regola di propagazione di incertezze generalmente nota (ma, al dire il vero, non troppo fra gli insegnanti di scuola media) è quella cosiddetta degli "errori statistici", che riportiamo per comodità:

$$\sigma^2(y) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma^2(x_2) + \ldots \qquad \text{(A.9)}$$

Essa è decisamente meglio di quella precedente, se non altro in quanto si sostituiscono probabilità a incertezze. Ma all'atto pratico anche questa formula presenta i suoi problemi.

- Innanzitutto è da premettere il dato di fatto che molti studenti studiano questa formula in modo astratto, senza nessuna applicazione durante l'intero corso di laurea, e quindi si crea un atteggiamento di diffidenza nei suoi confronti. E difatti, alla prima occasione in cui si tenta di applicarla, nascono i problemi.

- Seconda premessa è che la (A.9) non è completa, essendo valida soltanto nel caso in cui le x_i sono indipendenti, condizione che è violata qualora le grandezze sono misurate con lo stesso strumento, un caso tutt'altro che astratto.

- Comunque, il primo problema legato a tale formula è quello di interpretazione. Per qualcuno potrà sembrare un cavillo filosofico, ma in realtà è un punto cruciale. Cosa significa $y \pm \sigma(y)$? La stragrande maggioranza delle persone interpellate sono concordi nell'affermare che (assunto un modello gaussiano) essa voglia indicare

  $$P\left[y - \sigma(y) \le y_v \le y + \sigma(y)\right] = 68\,\% \ : \qquad \text{(A.10)}$$

  > "c'è il $68\,\%$ di probabilità che il valor vero di y si trova nell'intervallo $y \pm \sigma(y)$".

  Quando poi si chiede *cosa sia la probabilità* si ottengono risposte tipiche ("casi favorevoli su casi possibili" e "limite della frequenza") che non contemplano affermazioni probabilistiche sui valori veri, così come sono espresse dalla (A.10).

- Un problema pratico tipico è quello di "cosa mettere nelle $\sigma(x_i)$" della (A.9). Siccome questa formula deriva dal calcolo delle probabilità, applicato alle variabili casuali, le x_i e la y che entrano nella formula devono avere il significato di variabile casuale e le $\sigma(x_i)$ quello di deviazione standard. Quindi, se non si associano variabili casuali ai valori veri, l'uso della (A.9) è arbitrario.

- Nel caso di n misure ripetute, si impara che le $\sigma(x_i)$ vanno calcolate come "$\sigma/\sqrt{n}$" (nonostante si incontra ancora qualcuno diffidente del fattore $1/\sqrt{n}$ e che preferisce ometterlo per "non avere errori troppo piccoli"). Purtroppo, non sempre è possibile effettuare molte misure che mostrino una variabilità da manuale dei valori letti. Come comportarsi, ad esempio, se:
  - si effettua una sola misura ($n = 1$)?
  - si legge un grandissimo numero di volte ("$n \to \infty$") lo stesso valore (ad esempio 3.512 V su uno strumento digitale)?
- Come comportarsi se sono presenti anche "errori sistematici"?
- Come valutare e gestire le correlazioni fra diverse misure introdotte, ad esempio, da errori sistematici comuni?

La conseguenza di questi problemi tecnici (usualmente quello di principio sull'interpretazione della probabilità non viene nemmeno preso in considerazione) è che in genere gli studenti imparano delle formule che poi non utilizzeranno e seguitano a lavorare con gli errori massimi. Qualcuno prova a trasformare "errori massimi" in "errori statistici", considerando $\Delta x = 3\sigma(x)$ e, nella direzione opposta, $\sigma(x) = \Delta x/\sqrt{6}$ (assumendo una distribuzione uniforme del valore vero di x entro $2\,\Delta x$). La seconda trasformazione è ragionevolissima se veramente si crede che x possa assumere qualsiasi valore entro $\pm\Delta x$, sebbene questo credere sia in contrasto con le interpretazioni usuali di probabilità. La trasformazione inversa ($\sigma \to \Delta$), con l'uso successiva delle propagazioni lineari è invece assurdo in quanto in contrasto con le proprie credenze (gli errori massimi assumono, tacitamente, indifferenza entro $\pm\Delta$).

A.4 Riassumendo

Per concludere, l'approccio tradizionale alle incertezze di misura è tutt'altro che soddisfecente: la teoria degli "errori massimi" è visibilmente incongruente dal punto di vista teorico e insoddisfacente dal punto di vista pratico; non si sa bene come comportarsi con quella degli "errori statistici".

In particolare, questa rassegna critica dovrebbe aver fatto sorgere al lettore dei seri dubbi su: validità del concetto stesso di errore massimo; dogma della 1/2 divisione; propagazioni lineari degli errori massimi; imperativo categorico delle barre d'errore; retta di massima e minima pendenza; validità delle affermazioni probabilistiche sui valori veri; uso pratico della propagazione degli errori statistici; terminologia varia.