# Le basi del metodo sperimentale
# – un'introduzione pratica –

G. D'Agostini
Dipartimento di Fisica, Università "La Sapienza", Roma

1 febbraio 2001

# Indice

# Parte III

# Elementi di metrologia

# Capitolo 8

# Misure, strumenti ed errori di misura

## 8.1 Introduzione

In questo capitolo vengono introdotti concetti generali e definizioni di interesse dei processi di misura, senza la minima pretesa di offrire un minitrattato di metrologia. L'intento è semplicemente di chiarire il linguaggio per poi affrontare la parte più interessante e specifica del corso, ovvero quella che dai numeri osservati sugli strumenti permette di accrescere il grado di conoscenza sulle grandezze e sui fenomeni sotto studio.

Premettiamo una nota per quanto riguarda la terminologia adottata. Come per tutti i linguaggi, anche quello scientifico è da considerarsi materia viva in continua evoluzione. Anch'esso ha i suoi gerghi e a volte addirittura delle ambiguità. In questo testo si è cercato di seguire il più possibile le raccomandazione delle organizzazioni che sono istituzionalmente predisposte a far ordine in tale materia. L'organizzazione più autorevole a livello mondiale è l'ISO (Organizzazione Internazionale per la Standardizzazione, con sede a Ginevra). Essa ha pubblicato recentemente una *"Guida all'espressione dell'incertezza di misura"* e un vocabolario di termini di metrologia con l'intento mettere un po' di ordine nella materia. Altra organizzazione molto influente è quella che cura le norme DIN (Norme per l'Industria Tedesca). Queste norme controllano oramai le specifiche di quasi tutti i prodotti che circolano in Europa e nel Mondo, dalla vetreria di laboratorio di chimica alla qualità del calcestruzzo, dal formato della carta per fotocopie (quello più comune si chiama per l'appunto DIN A4) agli elettrodomestici e alla ergonometria delle autovetture. Nel nostro paese l'ente che si occupa di standardizzazione è l'UNI (Ente Italiano per l'Unificazione), partner italiano dell'ISO.

## 8.2 Grandezze e unità di misura

Ricordiamo innanzitutto che per *grandezza* (*misurabile*)[1] si intende "un attributo di un fenomeno, di un corpo o di una sostanza che può essere distinto

[1] Eventuali aggettivi o precisazioni fra parentesi nelle definizioni possono essere omessi se non generano confusione.

| Grandezza | | Dimensione | | Unità di base SI | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nome | Simbolo | a) | b) | Nome | Simbolo |
| lunghezza | $l$ | dim $l$ | $\mathsf{L}$ | metro | m |
| massa | $m$ | dim $m$ | $\mathsf{M}$ | chilogrammo | kg |
| tempo | $t$ | dim $t$ | $\mathsf{T}$ | secondo | s |
| corrente elettrica | $I$ | dim $I$ | $\mathsf{I}$ | ampere | A |
| temp. termodinamica | $T$ | dim $T$ | $\Theta$ | kelvin | K |
| quantità di materia | $n$ | dim $n$ | $\mathsf{N}$ | mole | mol |
| intensità luminosa | $I_v$ | dim $I_v$ | $\mathsf{J}$ | candela | cd |

Tabella 8.1: Grandezze di base del Sistema Internazionale.

qualitativamente e determinato quantitativamente". Il termine è utilizzato sia in senso *generale* (lunghezza, tempo, massa, resistenza elettrica, concentrazione in quantità di materia, etc.) sia in senso *particolare* (lunghezza di una barretta di acciaio, massa di un pianeta, concentrazione in quantità di materia di etanolo in un campione di vino, etc.). Le grandezze sono dette della *stessa natura*, o *omogenee*, se è possibile classificarle l'una rispetto all'altra in ordine crescente o decrescente. Grandezze della stessa natura possono essere raggruppate in *categorie di grandezze*, ad esempio: lavoro, calore, energia; diametro, spessore, lunghezza d'onda.

Un insieme di grandezze, intese nel senso generale, fra le quali esistono delle relazioni definite costituiscono un *sistema di grandezze*. In esso si definiscono *grandezze di base* quelle che sono convenzionalmente accettate come funzionalmente indipendenti le une dalle altre. Ad esempio le grandezze *lunghezza, massa e tempo* sono prese generalmente come grandezze di base della meccanica. La tabella 8.1 mostra la lista completa delle sette grandezze di base del Sistema Internazionale (SI). Una *grandezza derivata* è definita, in un certo sistema, come funzione delle grandezze di base. Ad esempio, nel sistema SI la velocità è una grandezza derivata definita come il rapporto fra lunghezza e tempo.

La *dimensione di una grandezza* è una espressione che rappresenta una grandezza di un sistema come prodotto di potenze di fattori dati dalle grandezze di base di quel sistema. Ad esempio le grandezze di base della meccanica nel sistema SI sono indicate con $\mathsf{L}$, $\mathsf{M}$ e $\mathsf{T}$. Ne segue che le dimensioni della velocità e della forza sono rispettivamente $\mathsf{LT}^{-1}$ e $\mathsf{LMT}^{-2}$. Un altro modo di scrivere le dimensioni, indicata con a) nella tabella 8.1, è mediante il simbolo della grandezza stessa preceduto da "dim". Secondo questa convenzione le dimensioni di velocità e forza vanno scritte come: $\dim v = \dim\,(l\,t^{-1})$ e $\dim F = \dim\,(l\,m\,t^{-2})$. A seconda della convenzione usata la dimensione della generica grandezza $G$ può essere scritta nei due modi:

$$\dim G = \dim\,(l^\alpha m^\beta t^\gamma I^\delta T^\epsilon n^\zeta I_v^\eta)\,; \tag{8.1}$$

$$\dim G = \mathsf{L}^\alpha \mathsf{M}^\beta \mathsf{T}^\gamma \mathsf{I}^\delta \Theta^\epsilon \mathsf{N}^\zeta \mathsf{J}^\eta\,. \tag{8.2}$$

Una grandezza è *adimensionale* se nell'espressione della dimensione si riducono a zero tutti gli esponenti delle dimensioni delle grandezze di base. Ad esempio, sono grandezze grandezze adimensionali: il coefficiente di dilatazione termica; il coefficiente di attrito; la suscettibilità elettrica; l'umidità relativa; l'angolo solido; l'indice di rifrazione. Con *unità* (*di misura*) si intende una particolare quantità, definita e adottata per convenzione, con cui si confrontano altre grandezze delle stessa natura per esprimerle quantitativamente come rapporto rispetto a questa grandezza. Alle unità di misura vengono assegnati per convenzione dei *nomi* e dei *simboli*.

Le unità di misura delle grandezze di base e delle grandezze derivate sono chiamate rispettivamente *unità* (*di misura*) *di base* e *unità derivate*. Le unità di base del sistema SI sono mostrate in tabella 8.1. La tabella 8.2 mostra alcune grandezze derivate del SI che hanno nomi propri.

L'insieme delle unità di base e delle unità derivate, definite secondo delle regole date per un dato sistema di grandezza, forma un *sistema di unità* (*di misura*). Una unità derivata è *coerente* se essa può essere espressa come prodotto delle potenze delle unità di base con un fattore di proporzionalità unitario. In particolare, se in un sistema di unità di misura tutte le unità sono coerenti il sistema stesso è indicato come *sistema coerente*. Ad esempio il sistema SI è coerente. Le unità che non appartengono al sistema di unità di misura sono dette *fuori sistema*. Esempi di unità fuori sistema per il sistema SI sono le unità di tempo *giorno, mese*, e *anno*, o l'*elettronvolt* ($\approx 1.602 \times 10^{-19}$ J). Delle unità di misura sono usati spesso *multipli* e *sottomultipli*. I simboli dei multipli e sottomultipli decimali di una unità sono costruiti dai simboli delle unità mediante prefissi (vedi tabella 6.1).

Il *valore* (*di una grandezza*) rappresenta l'espressione quantitativa di una grandezza particolare (nel senso introdotto precedentemente). Esso è dato generalmente sotto forma di una unità di misura moltiplicata per un numero, come nei seguenti esempi:

| | |
|---|---|
| *lunghezza di una barretta* | $0.2384\,\mathrm{m},\ 238.4\,\mathrm{mm},\ \mathrm{etc.}$ |
| *tempo di reazione* | $0.185\,\mathrm{s},\ 185\,\mathrm{ms},\ \mathrm{etc.}$ |
| *tensione di una batteria* | $8.75\,\mathrm{V}$ |
| *quantità di materia di un gas* | $0.037\,\mathrm{mol},\ 37\,\mathrm{mmol}$ |
| *coefficiente di attrito* | $0.331$ |
| *temperatura di un liquido* | $15.41\,^\circ\mathrm{C},\ 288.56\,\mathrm{K}$ |

Il numero che esprime il rapporto fra il valore dellla grandezza e la sua unità è il *valore numerico* della grandezza. Nell'esempio precedente il valore numerico della barretta vale 238.4 se si scelgono i millimetri come unità di misura. Come si vede, il valore di una grandezza può essere espresso in più modi. Naturalmente i valori di grandezze adimensionali sono espressi da *numeri puri*.

Il valore di una grandezza è quindi espresso da

$$G = \{G\} \cdot [G], \tag{8.3}$$

dove $G$ che rappresenta la grandezza fisica, $[G]$ l'*unità di misura* e $\{G\}$ il suo *valore numerico*. Si ricorda a tale proposito che il valore di una grandezza fisica è invariante per cambiamento di unità di misura. Se $G$ è una grandezza fisica e $\{G\}_a$ e $\{G\}_b$ sono i suoi valori numerici quando essa è espressa rispettivamente nelle unità $[G]_a$ e $[G]_b$, la condizione di invarianza può essere scritta:

$$G = \{G\}_a \cdot [G]_a = \{G\}_b \cdot [G]_b\,. \tag{8.4}$$

| Grandezza | Dimensioni | Unità derivate SI | |
|---|---|---|---|
| | | Nome | Simbolo (Relazione) |
| angolo piano | - | radiante | rad<br>(1 rad = 1 m/m) |
| angolo solido | - | steradiante | sr<br>(1 sr = 1 $m^2/m^2$) |
| frequenza | $T^{-1}$ | hertz | Hz<br>(1 Hz = 1 $s^{-1}$) |
| attività | $T^{-1}$ | becquerel | Bq<br>(1 Bq = 1 $s^{-1}$) |
| forza | $M\,L\,T^{-2}$ | newton | N<br>(1 N = 1 kg · $m/s^2$) |
| pressione | $M\,Ł^{-1}T^{-2}$ | pascal | Pa<br>(1 Pa = 1 $N/m^2$) |
| energia | $M\,L^2\,T^{-2}$ | joule | J<br>(1 J = 1 N · m)<br>= 1 W · s |
| potenza | $M\,L^2\,T^{-3}$ | watt | W<br>(1 W = 1 J/s) |
| dose equivalente | $L^2\,T^{-2}$ | sievert | Sv<br>(1 Sv = 1 J/kg) |
| dose in energia | $L^2\,T^{-2}$ | gray | Gy<br>(1 Gy = 1 J/kg) |
| carica elettrica | $T\,I$ | coulomb | C<br>(1 Gy = 1 A · s) |
| differenza di potenziale | $M\,L^2\,T^{-3}\,I^{-1}$ | volt | V<br>(1 V = 1 J/C) |
| capacità elettrica | $M\,L^2\,T^{-4}\,I^{-2}$ | farad | F<br>(1 F = 1 V/C) |
| resistenza elettrica | $M\,L^2\,T^{-3}\,I^{-2}$ | ohm | Ω<br>1 Ω = 1 V/A) |
| conduttività | $M^{-1}L^{-2}\,T^3\,I^2$ | siemens | S<br>(1 S = 1 $\Omega^{-1}$) |
| flusso magnetico | $M\,L^2\,T^{-2}\,I^{-1}$ | weber | Wb<br>(1 Wb = 1 V · s) |
| densità di flusso magnetico | $M\,T^{-2}\,I^{-1}$ | Tesla | T<br>(1 T = 1 $Wb/m^2$) |
| induttanza | $M\,L^2\,T^{-2}\,I^{-2}$ | henry | H<br>(1 H = 1 Wb/A) |
| temper. Celsius | $\Theta$ | grado Celsius | °C<br>(1 °C = 1 K) |
| flusso luminoso | $J$ | lumen | lm<br>(1 lm = 1 cd · sr) |
| illuminazione | $L^{-2}J$ | lux | lx<br>(1 lx = 1 $lm/m^2$) |

Tabella 8.2: Grandezze derivate del Sistema Internazionale con nomi propri.

Questa relazione permette di effettuare il cambiamento di unità se si conosce il rapporto fra $[G]_a$ e $[G]_b$. Ad esempio, se $a$ e $b$ sono riferite a calorie e a joule, la grandezza quantità di calore scambiato $Q$ può essere espressa come

$$Q = 1.35\mathrm{cal} = 5.65\mathrm{J}\,, \tag{8.5}$$

in quanto

$$\frac{[G]_b}{[G]_a} = 4.1868\mathrm{J/cal}\,. \tag{8.6}$$

## 8.3 Valore vero

Una definizione importante è quella di *valore vero*[2] (di una grandezza), ovvero, detto alla buona, "quel" valore che si otterrebbe attraverso una "misura perfetta". Poiché, come vedremo nel seguito, è impossibile effettuare una misura esente da incertezze, ogni valore vero è per natura indeterminato. È da notare come la definizione ufficiale ISO del valore vero sia ancora più sottile. Esso è infatti

> *"un valore compatibile con la definizione di una data grandezza particolare".*

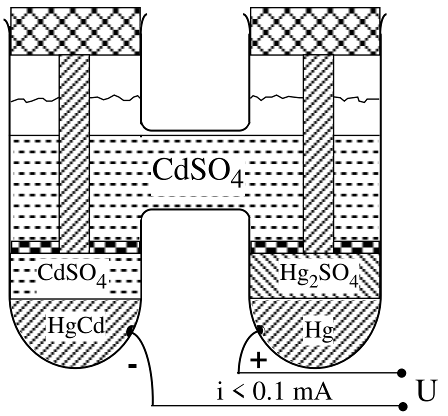
È da notare come anche l'uso dell'articolo indeterminativo non è casuale, in quanto ci possono essere più valori consistenti con la definizione di una data grandezza particolare. Questo sarà più chiaro quando, fra breve, analizzeremo in dettaglio le possibili cause dell'incertezza di misura. Risulterà, allora, che questa definizione, che ora può sembrare un po' vaga, è in effetti quella più pragmatica. Comunque, nel seguito useremo spesso la dizione "<u>il</u> valore vero" invece di "<u>un</u> valore vero".

Pur riconoscendo che il concetto di valore vero è, di fatto, una idealizzazione, ha senso parlare di valore *convenzionalmente vero* se con esso si intende quello attribuito a una grandezza particolare e accettato, per convenzione, in quanto avente un'incertezza appropriata all'uso. Ad esempio il valore indicato su un campione di riferimento può essere usato come valore convenzionalmente vero della grandezza se la sua incertezza ha un effetto trascurabile sull'incertezza totale. Ad esempio, la figura 8.1 mostra uno schema di una cella di Weston, insieme alla tabella che dà la differenza di potenziale in funzione della temperatura. Tale cella fornisce dei valori convenzionalmente veri di differenza di potenziale per le molte applicazioni di laboratorio[3] anche se la temperatura è nota in modo approssimativo.

[2] Secondo le più recenti raccomandazioni ISO, anche l'aggettivo "vero" sarebbe superfluo. Per questioni didattiche faremo uso il più delle volte dell'espressione "valore vero", come contrapposta a "valore misurato".

[3] In realtà oggigiorno è molto più comodo usare dispositivi a stato solido, ad esempio un diodo Zener.

Cella di Weston




| T(°C) | U(V) |
|---|---|
| 5 | 1,01904 |
| 10 | 1,01895 |
| 15 | 1,01883 |
| 20 | 1,01865 |
| 25 | 1,01842 |
| 30 | 1,01810 |

Figura 8.1: Cella di Weston per la calibrazione di voltmetri di precisione.

## 8.4 Misure: concetti e definizioni

Dopo i concetti di grandezza e di valore di una grandezza, possiamo introdurre quello di *misura*[4] come l'insieme di operazioni che hanno come scopo la determinazione del valore del *misurando*, ovvero della grandezza sottoposta a misura. È molto importante definire acccuratamente il misurando, ed eventualmente dare delle indicazioni riguardanti altre grandezze da cui può dipendere il suo valore. Per esempio nel definire i misurandi "densità dell'acqua" o "lunghezza di una certa barretta di allumio" è necessario specificare a quale temperatura essi sono riferiti. Le grandezze che possono condizionare il valore del misurando sono chiamate *variabili di influenza*.

Il principio che costituisce la base scientifica della misura è chiamato il *principio di misura*. Esso può essere un principio fisico, chimico, biologico, etc. Ad esempio: il principio fisico della dilatazione di un corpo con la temperatura sta a base della misura di temperatura effettuata mediante un termometro a mercurio; l'effetto Doppler può essere utilizzato per misurare la velocità di un corpo, mentre la legge dell'elasticità per pesare un oggetto mediante un dinamometro; la colorazione di una cartina al tornasole permette di valutare il $pH$ di una soluzione; e così via.

Per *metodo di misura* si intende invece la successione logica delle operazioni, descritte un maniera generica, messe in atto nell'eseguire la misura. Esso può essere classificato in diversi modi, come ad esempio: per *confronto*; per *sostituzione*; metodo *differenziale*; metodo *di zero*.

[4]In inglese questa serie di operazioni è chiamata "measurement", e differisce da "measure". C'è chi vorrebbe distiguere i concetti anche in italiano e utilizzare il sostantivo *"misurazione* per "measurement". In realtà, per essere poi coerenti si dovrebbe anche dire che la metrologia è la "scienza della misurazione", parlare di metodo e di principio "di misurazione". Nel mondo scientifico si usa comunemente misura per esprimere entrambi i concetti (nessuno parla di "misurazione della massa del *quark top*") e questa sarà la convenzione adottata in questo testo.

I metodi di misura sono classificati anche in *diretti* e *indiretti*. Nei metodi di misura diretti il valore misurato è espresso in termini della grandezza fisica del misurando e, nella maggior parte dei casi, esso è fornito direttamente dall'indicazione di uno strumento di misura[5]; nei metodi indiretti invece il valore misurato è espresso in termini di altre grandezze (misurate direttamente) e il valore di interesseè ottenuto mediante relazioni note. Ad esempio la misura della velocità istantanea di una vettura può essere determinata dal tempo che essa impiega a percorrere la distanza fra due traguardi posti molto vicini (misura indiretta) oppure dalla lettura del tachimetro (misura diretta). È da notare che, mentre tradizionalmente si tendeva a definire misure dirette quelle ottenuto per diretto confronto con un campione di misura, e indirette le altre, oggi si preferisce chiamare dirette semplicemente quelle misure realizzate con strumenti che hanno un'*uscita* ("*output*") diretta, nel senso che verrà definito nel paragrafo 8.9.1.

Per *definizione operativa* di misura (o *procedura della misura*) si intende invece l'insieme delle operazioni eseguite nell'effettuare le misure. Esse devono essere descritte ad un livello di dettaglio tale da permettere ad un altro sperimentatore di effettuare le misure senza ulteriori informazioni.

Molto spesso il risultato della misura viene ottenuto determinando il valore di un *segnale di misura*, ovvero una grandezza che rappresenta il misurando e a cui è legato mediante una funzione. Ad esempio una tensione o una corrente elettrica possono rappresentare il segnale di una misura proveniente da un trasduttore di pressione o dal sensore di un flussimetro di massa. Il segnale in ingresso a un sistema di misura è anche chiamato *stimolo* (o *sollecitazione*) e il segnale in uscita *risposta*. In figura 8.2 è mostrato il percorso compiuto dal segnale di misura nei diversi stadi di un termometro. Si noti come l'occhio dello sperimentatore non è l'ultimo stadio di questo processo di misura, ma è seguito dalla trasmissione attraverso le connessioni nervose fino al cervello, dove avviene l'elaborazione finale dell'informazione. E' importante abituarsi a pensare che nella maggior parte dei casi lo sperimentatore sia parte integrante del sistema di misura.

Anche le operazioni di *conteggio*, sia eseguite manualmente che con strumenti, sono misure. Si pensi, ad esempio, al conteggio di linfociti in un campione di sangue, del numero di decadimenti di una sostanza radioattiva in un certo intervallo di tempo o del numero di oggetti celesti osservabili a occhio nudo in una regione di cielo.

## 8.5 Risultati di misura, errori ed incertezze

L'esecuzione della procedura di misura porta ad un *risultato di una misura*, ovvero in un valore attribuito al misurando. Molto spesso il risultato della misura non è semplicemente pari all'*indicazione diretta*, ovvero valore letto sulla *scala* dello strumento. Questo può essere moltiplicato per una opportuna *costante dello strumento* per ottenere l'*indicazione dello strumento*. Inoltre

[5]Questa distinzione differisce dalla definizione secondo la quale la misura diretta è quella derivante da "un'operazione di confronto tra la grandezza da misurare e un'altra grandezza ad essa omogenea assunta come unità di misura".

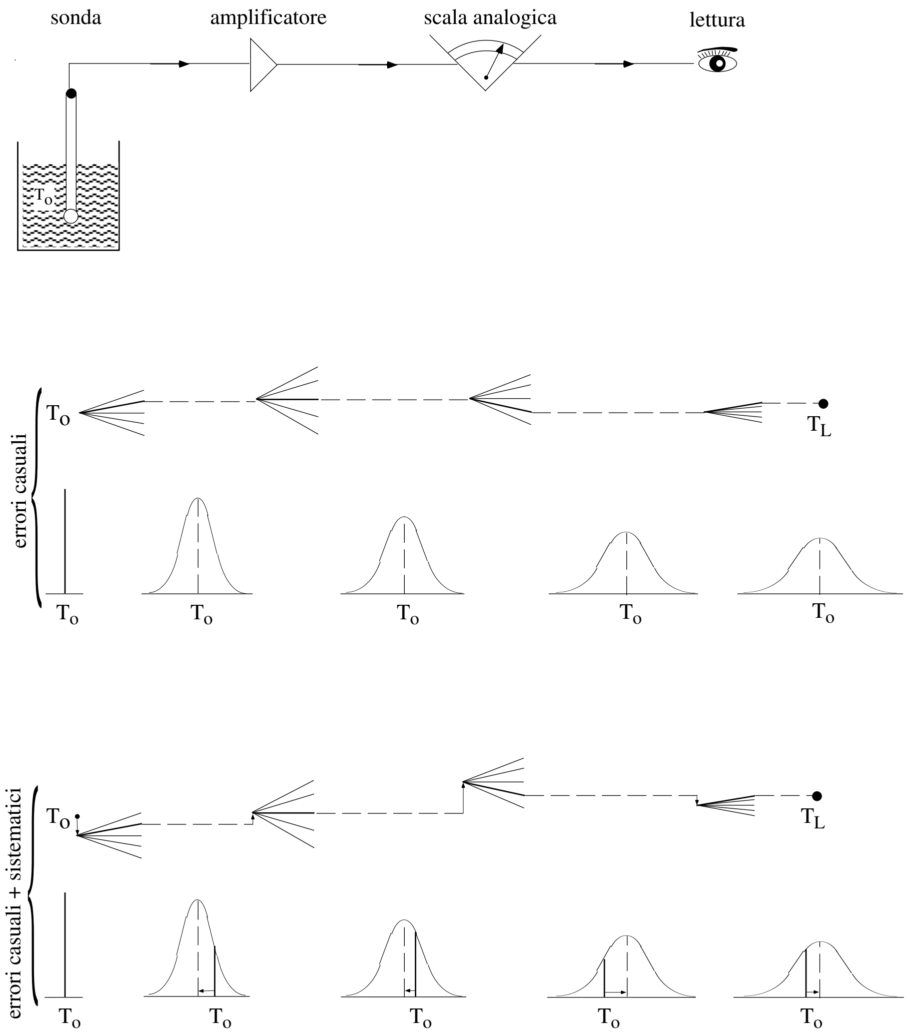



Figura 8.2: Esempio di catena di misura in uno strumento a uscita diretta analogica. È anche indicato schematicamente il deterioramento della qualità del segnale di misura durante il percorso dal sensore al cervello dello sperimentatore. L'effetto globale di deterioramento nei singoli stadi è descritto dalla così detta propagazione degli errori.

può essere necessario *correggere* un risultato *grezzo* per un errore sistematico (vedi dopo). Si ottiene così un *risultato corretto*.

A questo punto è importante definire esattamente cosa si intende per *errore* ed in particolare per errore sistematico. Anche in questo caso procediamo per gradi. Prima definiamo alcuni termini e poi ritorneremo a una discussione più approfondita sui diversi tipi di errore, sulle loro cause e sulla loro influenza sui risultati.

Cominciamo col dire che per *errore di misura* si intende la

> "differenza fra il risultato di una misura e il[6] valore vero del misurando".

Ma, poiché il valore vero di una grandezza è generalmente ignoto, ignoto è anche l'errore. Esso può essere valutato esattamente soltanto se si dispone di un campione di riferimento, ovvero di un valore convenzionalmente vero. Il rapporto fra l'errore e il valore vero del misurando definisce l'*errore relativo*. Ad esempio se uno strumento indica 0.985 V nel misurare una tensione di riferimento di 1.019 V, l'errore di misura è pari a -0.034 V e l'errore relativo è pari -0.033, ovvero $-3.3\,\%$. A volte, per chiarire meglio che si sta parlando dell'errore e non dell'errore relativo, il primo viene chiamato anche *errore assoluto* (espressione non va confusa con "valore assoluto dell'errore", o modulo dell'errore).

L'inevitabilità degli errori di misura e l'ignoranza della loro entità fa sì che non è dato di conoscere con esattezza il valore il valore del misurando. Ne segue allora che ad ogni risultato di misura è associato un certo grado di una *incertezza* (o *indeterminazione*[7]), ove con questo termine si intende, qualitativamente,

> "un parametro che caratterizza la dispersione dei valori che possono essere ragionevolmente attribuiti al misurando"[8].

Vedremo nel seguito come fornire quantitativamente l'incertezza di misura.

## 8.6 Cause delle incertezze di misura

Passiamo ora ad elencare le possibili sorgenti di incertezza di misura seguendo lo stesso ordine delle raccomandazioni ISO. Essa rappresenta una sorta di "decalogo" da scorrere ogni volta che si cercano le possibili sorgenti di errore.

1. *Incompleta definizione del misurando.*
   Ad esempio la "percentuale di potassio nell'acqua del Mar Adriatico" non definisce completamente il misurando e il risultato può dipendere da dove è prelevato il campione. Lo stesso vale per l'"accelerazione di gravità al livello del mare", in quanto essa dipende anche dalla latitudine e, potendo eseguire la misura con precisione infinita, dal punto esatto

[6] La definizione ISO usa l'articolo indeterminativo "un", consistentemente con la definizione di valere vero.

[7] In inglese è "uncertainty". Per confronto può essere utile sapere che il Principio di Indeterminazione viene chiamato "Uncertainty Principle".

[8] Definizione ISO

(quale è il livello del mare?). Si capisce quindi come ogni indeterminazione sulla definizione si riflette su una infinità di valori che soddisfano la definizione (vedi definizione del valore vero[9]). Nel paragrafo 11.9 sarà trattato numericamente il caso di "densità dell'aria".

2. *Imperfetta realizzazione della definizione del misurando.*
   "Vita media di decadimento dell'isotopo $X$" e "sezione efficace di un neutrone bombardato da un fascio di elettroni" sono definizioni univoche, almeno in linea di principio. In pratica non è facile ottenere un campione assolutamente puro di sostanza o effettuare delle misure nelle condizioni ideali della definizione.

   Per fare altri esempi, si pensi a: "accelerazione di un corpo lungo un piano inclinato privo di attrito" e "periodo di un pendolo semplice di lunghezza $l$". Qui si fa chiaramente riferimento ad astrazioni di cui gli apparati sperimentali sono imperfette realizzazioni.

3. *Campione non rappresentativo, ovvero il campione misurato non rappresenta il misurando definito*
   Caso classico sono i sondaggi per stimare - misurare - la "percentuale della popolazione in possesso di un certo carattere" (in senso lato). Non avendo a disposizione le risorse economiche e il tempo per eseguire un'indagine adeguata, o in mancanza di un modello teorico per la scelta del campione si rischia di effettuare un sondaggio su coloro che sono caratterizzati da un'altra proprietà comune dalla quale può dipendere il carattere oggetto della ricerca (ad esempio si può rischiare di intervistare solo amici o concittadini, o solo coloro che vedono la televisione ad una certa ora o che trascorrono il pomeriggio a casa). Altro esempio è quello dell'analisi chimico-fisica di un quadro che comporta la distruzione di un campione di tela. Le informazioni che si ricavano da un lembo periferico - più facilmente ottenibile per l'analisi - possono differire da quelle ottenibili da parti artisticamente più interessanti del quadro (convincereste il Louvre a cedervi un occhio della Gioconda?).

4. *Imperfetta conoscenza delle condizioni ambientali di influenza o inadeguata conoscenza degli effetti di tali condizioni*
   Ad esempio una misura di precisione può essere falsata dalla non esatta conoscenza della temperatura ambientale. La figura 8.3 mostra, ad esempio, l'errore introdotto nella misura, se questa viene eseguita ad una temperatura $T$ diversa da quella di riferimento $T_\circ$. Conoscendo i coefficienti di dilatazione termica è possibile correggere il valore ottenuto (come mostrato in figura), ma ogni eventuale incertezza sul valore di $T$ (e, in misura minore, su $\alpha$) si *"propaga"* nell'incertezza sulla lunghezza $l$.

[9]Si capisce quindi come la definizione di valore vero come "quello che si otterrebbe dopo una serie infinita di misure con strumentazione ideale" non è migliore di quella ISO, anzi, questa dà l'illusione che questo valore sia, almeno idealmente, unico, mentre la definizione ISO tiene conto che le misure vengono eseguite in condizioni reali e con tutte le cause di incertezza che saranno elencate in questo paragrafo.

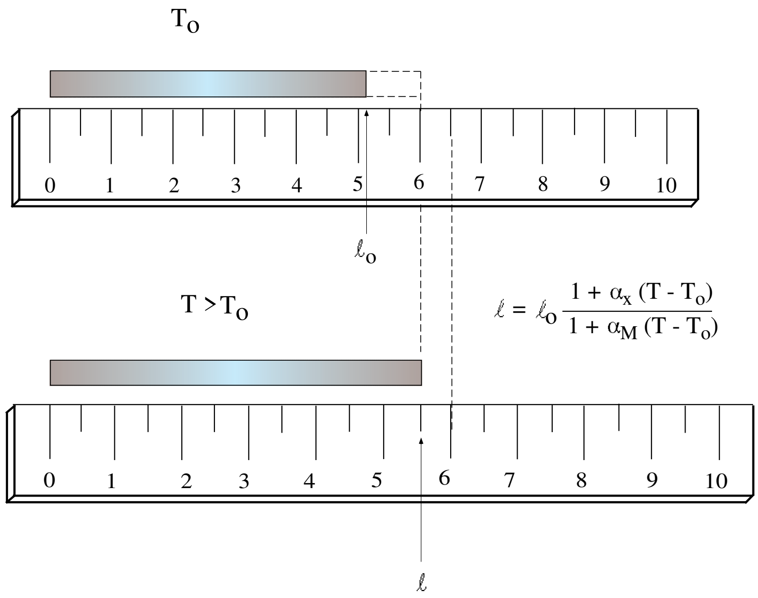



Figura 8.3: Esempio di errore sistematico dovuto all'utilizzo di uno strumento a temperatura diversa da quella nominale.

5. *Errore di lettura di uno strumento*.
   La lettura delle scale analogiche dipende dall'acuità visiva e dall'abilità di stima dello sperimentatore. Ad esempio, un errore grossolano è quello di *parallasse*, mostrato in figura 8.4. È da notare inoltre che la qualità delle interpolazioni della lettura dipendono molto dalle condizioni di lavoro (illuminazione e facilità di lettura) e dal fatto che la grandezza fisica sia statica o rapidamente variabile con il tempo. Non è inoltre da trascurare la dipendenza dall'importanza che lo sperimentatore dà a priori alla qualità della determinazione di tale grandezza fisica. Infatti è inutile sforzarsi a leggere i decimi di millimetro per dare al falegname le dimensioni di una finestra.

   Da queste considerazioni ne segue che l'incertezza da associare all'errore di misura non è univocamente determinata dal tipo di strumento (ved, ad esempio, l'esperienza descritta nel paragrafo 2.2).

6. *Risoluzione finita o soglia di discriminazione dello strumento*.
   Ad esempio, se la lettura avviene con uno strumento digitale si è limitati alla cifra meno significatica del display anche se la qualità del *segnale di misura* è tale da essere significativamente sensibile a variazioni di valori ben minori dell'entità dell'ultima cifra del display.
   Come esempio numerico prendiamo un dispositivo elettronico che produce una variazione nella tensione di uscita di 17 mV se la pressione cambia di 1 mbar Assumiamo che a 1018 mbar il *segnale di misura* sia pari a 3.714 V, direttamente convertito in mbar e mostrato su un display digitale a 4 cifre. Una variazione di $\pm 0.2$ mbar non produce nessuna variazione dell'indicazione ("1018") pur causando una variazione di

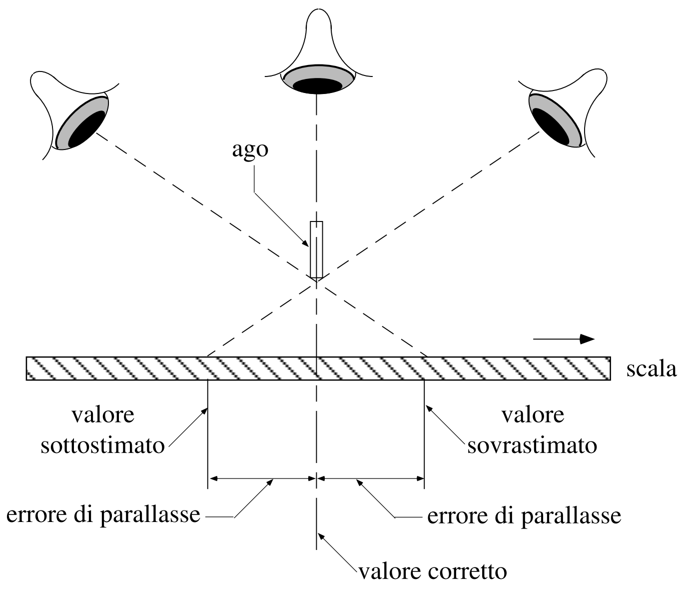



Figura 8.4: Errore di parallasse. La figura mostra la diversa lettura che si ottiene osservando la scala dello strumento da angolazioni diverse. Gli strumenti di precisione hanno una porzione della scala riflettente allo scopo di minimizzare tale effetto.

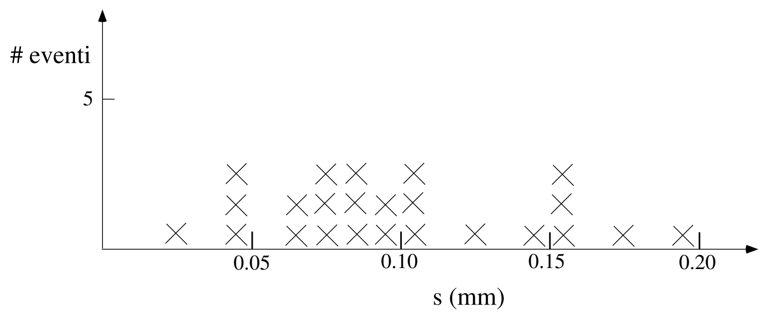



Figura 8.5: Capacità di interpolazione fra le tacche. Distribuzione della deviazione standard della differenza fra il valore stimato e quello letto sul nonio. I risultati sono basati sulle misure eseguite da 25 studenti, ciascuno dei quali ha effettuato 10 letture.

$\pm 3.4$ mV sul segnale di misura (per i concetti di risoluzione di strumenti analogici e di soglia di discriminazione vedi par. 8.9.1).

7. *Valori inesatti dei campioni e dei materiali di riferimento.*
   Si pensi ad esempio ad una massa campione con graffi, polvere e ossidazioni, oppure ad una soluzione campione di pH che si è contaminata dal momento della sua preparazione.

   I campioni servono a calibrare (o ricalibrare) gli strumenti. Ogni incertezza sul valore del campione si riflette sulla *costante di calibrazione* e quindi su tutte le misure che saranno eseguite con tale strumento. Le incertezze su queste misure saranno quindi correlate.

8. *Valore inesatto di costanti e altri parametri che intervengono nell'analisi dei dati.*
   Spesso le misure indirette dipendono da costanti e parametri misurati dallo stesso sperimentatore, da suoi colleghi o semplicemente riportate su articoli o libri. Ogni incertezza su queste grandezze si *propaga* su quelle misurate.

9. *Approssimazioni e assunzioni che intervengono nel metodo e nella procedura di misura.*
   Ad esempio, nel modello teorico elementare che descrive l'oscillazione del pendolo sono usualmente trascurati gli effetti che derivano dal fatto che l'angolo di oscillazione è diverso da zero. Se si conoscono i termini correttivi si può ottenere, in linea di principio, il valore $T(\alpha = 0)$ dal valore misurato $T(\alpha = \alpha_\circ)$. Se invece si è *coscienti* di effetti che non si è in grado di calcolare, oppure se si può effettuare soltanto una stima grossolana degli stessi, allora si dovrà introdurre un ulteriore contributo all'incertezza.

10. *Variazioni in osservazioni ripetute del misurando sotto condizioni di misura apparentemente identiche.*
    Queste variazioni sono legate ai cosiddetti *errori casuali*, dei quali parleremo in modo più particolareggiato nel seguito.

La determinazione quantitativa delle incertezze verrà trattata in modo sistematico nel seguito. Per ora, restando su un piano più qualitativo, è importante notare che:

- non è facile effettuare una suddivisione netta fra le diverse sorgenti di incertezza e, in particolare, tutte quelle dei punti 1-9 hanno una qualche influenza sul punto 10 in quanto difficilmente esse produrranno esattamente un identico effetto durante una serie di misure;

- nella maggior parte delle misure lo sperimentatore fa parte integrante del processo di misura. Il risultato dipende molto da abilità ed esperienza di chi effettua le misure, sia per quanto riguarda la manualità nell'operare gli strumenti nella lettura di strumenti analogici, che per la capacità di vagliare i vari contributi all'errore di misura. Quindi è difficile separare l'incertezza "intrinseca" dovuta allo strumento da quella di altri contributi.

## 8.7 Errori casuali e sistematici

Gli errori vengono generalmente suddivisi in due categorie: *errori casuali* ed *errori sistematici*. Gli *errori casuali* sono dovuti a influenze non controllabili e non unidirezionali (cioè a media nulla) che intervengono durante una serie di misure. Essi sono responsabili della *variabilità* dei valori misurati intorno ad un certo valor medio a parità di delle condizioni sperimentali. Detto in altri termini, essi sono responsabili della sorgente di incertezza del punto 10 vista nel paragrafo precedente. Sono chiamati invece *errori sistematici* le deviazioni dal valor vero che durante la misura sono costanti in entità e mantengono lo stesso segno. Ad esempio, un micrometro può fornire indicazioni di lunghezza che differiscono fra di loro leggermente a causa di errori casuali dovuti a piccoli attriti, all'irregolarità delle superfici e alla valutazione dell'indicazione da parte dello sperimentatore. Ma il valore medio delle misure può differire dal valore vero molto di più di quanto ci si aspetta ragionevolmente dalla distribuzione di probabilità della media se lo strumento è *scalibrato*. In questo caso si dirà che è la misura è affetta da un errore sistematico.

Gli errori sistematici possono variare con il tempo. Ciò implica che un fattore di influenza può produrre un errore da considerare sistematico o casuale a seconda delle condizioni di lavoro. Ad esempio la temperatura ambiente, tipica causa di errori sistematici, può produrre errori casuali se si effettuano diverse misure a distanza di tempo in un ambiente in cui la temperatura non è monitorata costantemente. Questo ci insegna che non è ha senso una separazione netta fra errore casuale ed errore sistematico.

## 8.8 Precisione e accuratezza

I termini *precisione* e *accuratezza*[10] sono messi in relazione con gli errori casuali e sistematici. Una misura è tanto più *precisa* quanto più i singoli valori misurati in condizioni di *ripetitibilità*[11] si concentrano intorno alla media della serie di misure effettuate. Il concetto di precisione è qualitativo. La variabilità dei risultati viene quantificata, come di consueto, nella deviazione standard $\sigma$. Ma questa di per sé non è atta a quantificare la precisione della misura secondo il significato usuale del termine di "qualità della misura". Ad esempio una deviazione standard di 1 mm rappresenta ottima o pessima precisione a seconda che si stiano misurando lunghezze della decina di metri o inferiori al centimetro. Si preferisce quantificare la precisione con il modulo del coefficiente di variazione $v = \sigma/|\overline{x}|$, in genere espresso in percentuale (vedi 5.9). Una deviazione standard di 1 mm su una misura di 10 cm corrisponde ad una precisione dell'1 %. Si presti attenzione al fatto che nell'uso corrente "maggiore" è la precisione "minore" è il numero che la indica.

L'*accuratezza* esprime invece l'assenza di errori sistematici nella misura: una misura è tanto più accurata quanto più la media delle misure si approssima al valore vero della grandezza. Anche l'accuratezza è spesso espressa come rapporto fra l'errore sistematico e il valore della grandezza. La figura 8.7 indica

[10] I termini inglesi equivalenti sono *precision* e *accuracy*.

[11] Per le definizioni di ripetitibilità e riproducibilità vedi i paragrafi 10.2 e 11.2.1.

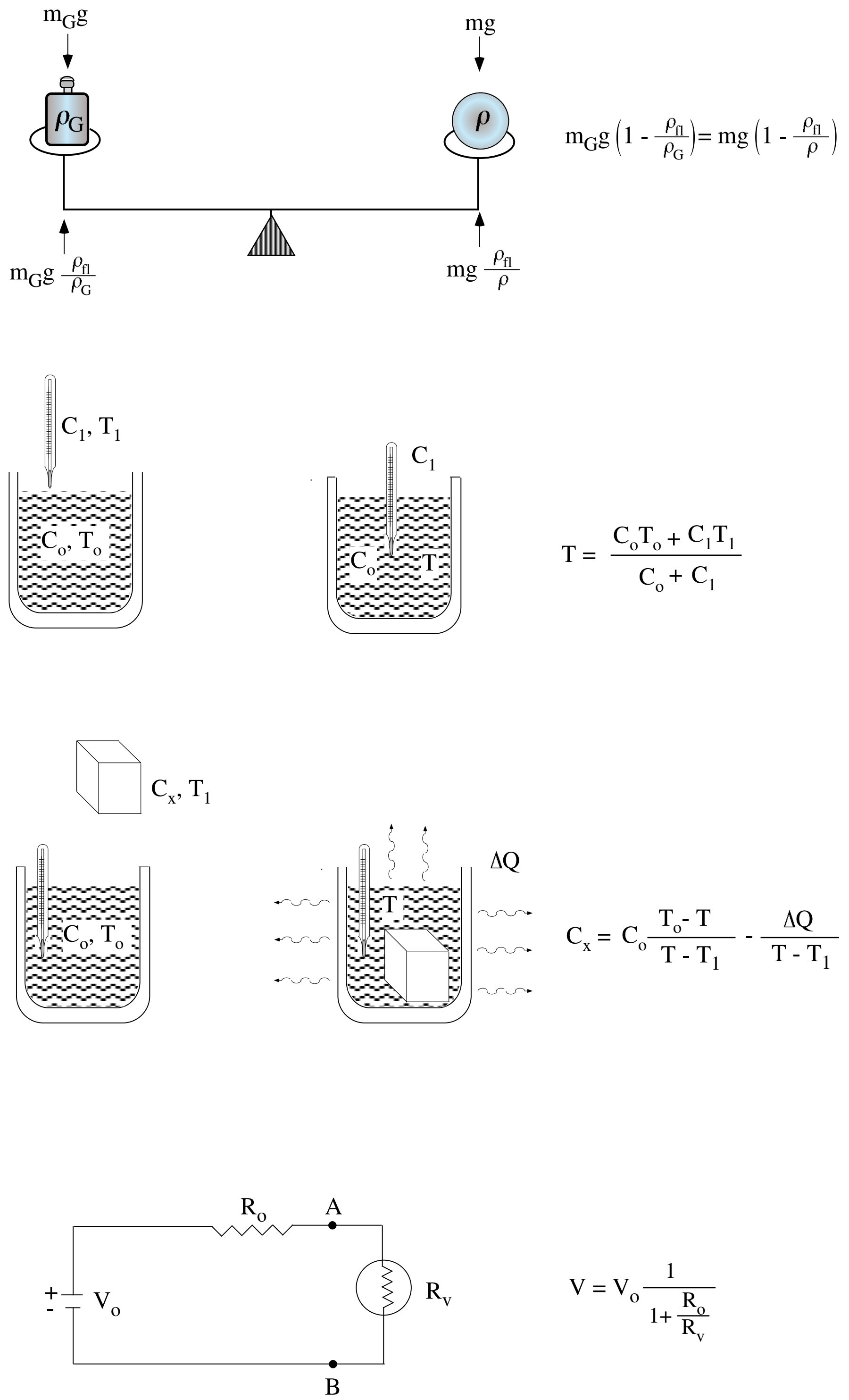



Figura 8.6: Esempi di errori sistematici. Dall'alto verso il basso: effetto della spinta di Archimede nelle misure di peso a pressione normale; effetto della capacità finita del termometro; dispersione del calore in una misura di calorimetria; effetto della resistenza interna di un voltmetro nella misura di tensioni

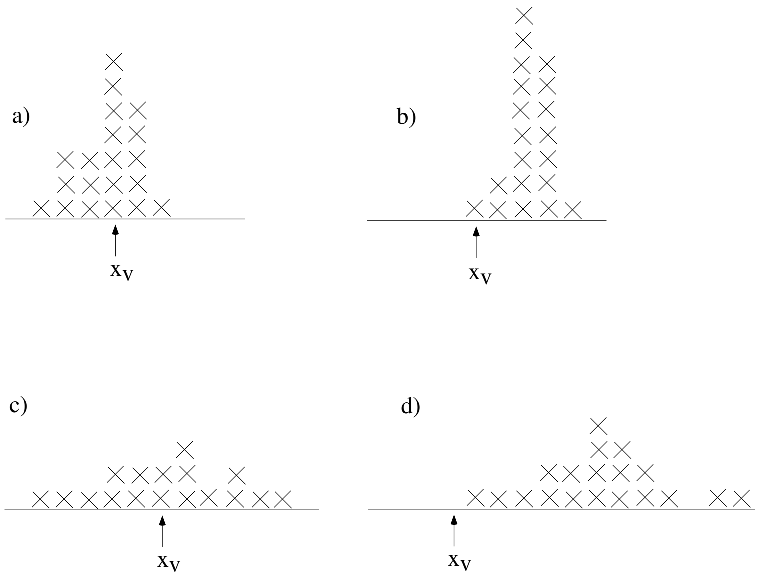



Figura 8.7: Esempi di risultati ottenuti da misure di diverso grado di precisione e di accuratezza. Ad esempio il caso b) mostra misure effettuate con maggiore precisione, ma con peggiore accuratezze del caso c). Il caso d) è quello peggiore sia per quanto riguarda la precisione che l'accuratezza.

la distribuzione di valori ottenuti da misure di diversa precisione e accuratezza, in una situazione in cui si conosce un valore convenzionalmente vero.

## 8.9 Strumenti di misura

### 8.9.1 Introduzione

La definizione più generale di *strumento di misura* è quella di un dispositivo destinato ad essere utilizzato per effettuare delle misure, solo o associato ad altri dispositivi. In genere si può parlare di un *sistema di misura* come insieme di più strumenti di misura, oltre ad accessori addizionali che completano il sistema. Sia lo strumento che il sistema di misura si possono presentare come una *catena di misura*. Essa comprende una serie di elementi che costituiscono il cammino del segnale dall'ingresso all'uscita (vedi ad esempio figura 8.2).

Si parla di *misura materializzata* (*campioni di misura*) per indicare strumenti che rappresentano uno specifico valore o una serie di valori del misurando, per esempio una unità, con multipli e/o sottomultipli. Questo è il caso di righelli per misure di lunghezze, di cilindri graduati, o anche di resistenze campione, pesi campione, etc. In questo caso il valore nominale della grandezza corrisponde all'indicazione su di essa.

L'elemento di uno strumento o di una catena di misura che è direttamente affetto dalla grandezza che si intende misurare è chiamato *sensore*. Esso rappresenta il primo stadio del processo di misura. Molto spesso è associato ad esso un *trasduttore*, il quale ha il compito di produrre come consequenza della grandezza di ingresso (stimolo) un segnale di misura, tipicamente elettrico (tensione o corrente). Esempi di trasduttori sono le termocoppie, cristalli pizoelettrici, elettrodi di pH, e così via.

Seguono poi uno o più stadi intermedi per il *trattamento* (analogico o digitale) *del segnale* ed infine un elemento finale (uscita) per l'*indicazione* oppure la *registrazione* del valore misurato (vedi, per esempio, figura 8.2. Più in generale, l'uscita dello strumento o della catena può essere classificata in *diretta* e *indiretta* a seconda che essa sia o meno direttamente percepibile dai sensi umani. Alla categoria degli strumenti ad uscita indiretta appartengono tutti i moderni strumenti che registrano le informazioni direttamente su una memoria di un calcolatore, su dischi magnetici o ottici. Ad esempio un barografo è uno strumento di registrazione che consente anche una lettura diretta dei valori misurati. È chiaro che, comunque, quando si entra nel regno dei computer queste classificazioni diventano un po' oziose. Ad esempio un computer che legge un segnale di misura tramite un'interfaccia complicata a piacere, lo converte "istantaneamente" in un valore della grandezza e lo mostra immediatamente su uno schermo si comporta come uno strumento a lettura diretta con indicazione e registrazione simultanee.

### 8.9.2 Strumenti a indicazione diretta

Per quanto riguarda gli strumenti con indicazione leggibile dallo sperimentatore questa può essere del tipo *analogica* e *digitale*. Nel primo caso un ago si posiziona, in genere con continuità, su una posizione lungo una scala graduata. Se invece l'indicazione è digitale l'uscita è data da un numero che rappresenta il valore della grandezza di interesse. A differenza degli strumenti analogici, gli strumenti digitali non hanno una scala leggibile con continuità. Ciascuna di queste indicazioni ha i suoi vantaggi e svantaggi. In particolare, la scala digitale produce una lettura dell'indicazione meno soggetta ad interpretazioni personali. Quella analogica fornisce la lettura a colpo d'occhio e può essere più appropriata per strumenti di controllo, quali un contagiri o un tachimetro di una moto.

Negli strumenti con indicazione analogica la scala consiste in un insieme ordinato di segni (*tacche*) per lo più equidistanziati e numerati. Un *indice* permette di leggere sulla scala il valore indicato dallo strumento. Esso può essere costituito ad esempio da una lancetta, un fascetto di luce o la superficie di un liquido, Spesso, negli strumenti di precisione, l'ago è particolarmente sottile e una superficie speculare lungo la scale serve a ridurre l'*errore di parallasse* (vedi Fig 8.4).

Le tacche dividono l'estensione della scala in *divisioni*. È importante notare che le scale analogiche sono fatte per una *indicazione continua* dei valori misurati, ovvero è lecito e doveroso interpolare fra le tacche se la qualità della misura lo richiede (vedi appendice A.2.2). Infatti la *spaziatura della scala*, ovvero la distanza fra due tacche, è generalmente scelta in modo tale da poter permettere la stima dei *decimi di divisione* (vedi figura 2.2).

In corrispondenza alla variazione di una divisione della posizione dell'ago l'indicazione della grandezza varia di una quantità chiamata *intervallo di scala*. A volte questo parametro è usato come quantità caratteristica di alcuni strumenti, come ad esempio nel caso di termometri a liquido, strumenti per misure di lunghezze, cilindri graduati, e altri. Si parla quindi di un righello da un millimetro per divisione, di un termometro da $0.2°C$ per divisione e così via.

Nel caso di strumenti ad uscita digitale la *scala* è *digitale* e fornisce ovviamente una indicazione discontinua del valore della misura. Comunque tale discontinuità diventa insignificante quando l'*incremento digitale* (cioè la differenza fra due valori numerici successivi dovuti ad una variazione della cifra meno significativa) è minore dell'incertezza di misura. Per *intervallo di scala* di strumenti digitali si intende la variazione della grandezza fisica che corrisponde all'incremento digitale della scala.

## 8.10 Caratteristiche degli strumenti

Analizziamo ora alcune caratteristiche degli strumenti che riguardano più propriamente le grandezza misurate. Per brevità si parlerà nel seguito sempre di "strumento", intendendo anche, più in generale, anche un sistema o una catena di misura.

### 8.10.1 Campo di misura e condizioni di lavoro

In uno strumento l'insieme dei valori del misurando per i quali la deviazione fra valori misurati e valori veri è compresa entro dei limiti specificati è chiamato *estensione di misura*, o *campo di lavoro*. Esso rappresenta quindi il campo di valori per i quali lo strumento si comporta conformemente alle caratteristiche dichiarate dal costruttore. L'estensione nominale si riferisce invece all'intervallo di indicazioni ottenibili con una particolare posizione dei comandi dello strumento (si pensi ad esempio ad un oscilloscopio nel quale è possibile variare il fondo scala mediante dei commutatori).

Affinché uno strumento possa soddisfare le caratteristiche metrologiche attese deve essere utilizzato entro *condizioni* (*prestabilite*) *di funzionamento* (o di lavoro). Queste condizioni si riferiscono sia al misurando che alle grandezze di influenza. Ad esempio un dispositivo elettronico può lavorare correttamente soltanto se utilizzato fra 0 e 80 °C. In particolare, esso non deve essere esposto a condizioni estreme (*condizioni limite*) che ne possono causare la rottura o compromettere le caratteristiche quando sarà successivamente utilizzato nelle condizioni prestabilite. Le condizioni limite si possono riferire non soltanto al funzionamento ma anche al trasposto e all'immagazzinamento. Ad esempio un oscilloscopio a raggi catodici può essere danneggiato sia a causa di sovrattensioni che di condizioni ambientali estreme.

Più vincolanti delle condizioni di funzionamento sono le *condizioni di riferimento*, prescritte per controllare le prestazioni di uno strumento o per confrontare i risultati con quelli ottenuti da altri strumenti. Ad esempio righelli, calibri e cilindri graduati sono tarati a 20 °C. Lo stesso dicasi per i multimetri analogici, per i quali è anche generalmente prescritto un uso in posizione orizzontale.

Uno strumento è *stabile* se mantiene costanti le sue caratteristiche metrologiche nel corso del tempo. Se invece queste cambiano lentamente con il tempo si dice che le caratteristiche dello strumento hanno una *deriva* (*temporale*).

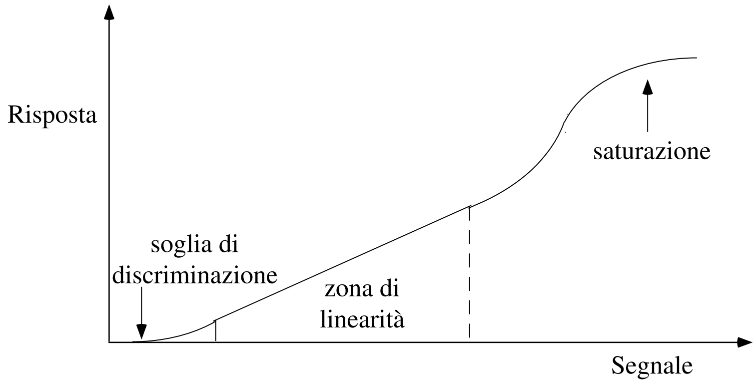



Figura 8.8: Caratteristica di risposta di uno strumento.

### 8.10.2 Dipendenza della risposta dallo stimolo

Al variare dello stimolo cambia "in genere" la risposta dello strumento. Il più delle volte il cambiamento dell'uscita non è istantaneo, ma richiede un *tempo di risposta*, definito come l'intervallo di tempo fra l'istante in cui il segnale di ingresso ha avuto un ben definito cambiamento improvviso e l'istante in cui il segnale di uscita raggiunge, entro determinati valori, e conserva il suo valore finale a regime. In alcuni strumenti in cui la risposta raggiunge il valore finale tramite una legge esponenziale del tipo

$$U(t) = U_{new} + [U_{old} - U_{new}]\, e^{-t/\tau}\,, \tag{8.7}$$

la costante $\tau$, che ha le dimensioni del tempo, viene chiamata *costante di tempo*. Ponendo $t = \tau$ nella (8.7) si verifica che essa rappresenta il tempo necessario affinché la differenza iniziale $U_{old} - U(t)$ si riduca di $1/e \approx 0.37$ di quella iniziale. Un esempio di strumento che si comporta in questo modo è il termometro. La velocità di adeguamento dello strumento alla nuova situazione è legata alla caratteristica di *prontezza*. Mentre è va da sé che uno strumento esageratamente lento è inadeguato, non è detto che una prontezza elevatissima ($\tau \to 0$ in un modello di risposta esponenziale) sia una qualità desiderabile. A volte è preferibile uno strumento lento, in quanto esso "filtra" fluttuazioni rapide di indicazione che non sono interessanti ai fini della misura.

Per quanto riguarda invece la dipendenza della risposta dallo stimolo, essa è data dalla *caratteristica di trasferimento* (o *di risposta*), esprimibile mediante una relazione matematica, una tabella numerica o un grafico (vedi figura 8.8). Essa può dipendere anche dalle condizioni di lavoro.

Il rapporto fra il cambiamento di risposta diviso il corrispondente cambiamento dello stimolo (sufficientemente piccolo) definisce la *sensibilità dello strumento*. Dal punto di vista matematico la risposta è legata alla derivata della curva caratteristica di risposta:

$$\text{Sensibilità} = \frac{\mathrm{d\,Risposta}}{\mathrm{d\,Stimolo}} \left( = \frac{\mathrm{d\,Uscita}}{\mathrm{d\,Ingresso}} \right)\,. \tag{8.8}$$

Per esempio un voltmetro analogico il cui ago si sposta lungo la scala di una divisione su una scala avente una spaziatura di 1 mm al variare di 10 mV della tensione ha una sensibilità di

$$S = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}V} \approx \frac{\Delta s}{\Delta V} = \frac{1\,\mathrm{mm}}{10\,\mathrm{mV}} = 0.1\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{mV}} = 10^2\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{V}}\,. \tag{8.9}$$

La sensibilità può dipendere dal valore del misurando e quindi in generale occorre specificare a quale valore si riferisce. Ad esempio il multimetro analogico utilizzato con un certo settaggio nella configurazione ohmetro ha una sensibilità che decresce con il valore del valore ("le tacche si infittiscono").

Nei tratti in cui la sensibilità è costante l'andamento della curva di risposta è *lineare* (vedi figura 8.8). Negli strumenti con scala lineare la sensibilità è pari al rapporto fra la spaziatura della scala (espressa in mm) e l'intervallo di scala (espresso in unità di misura della grandezza fisica). Ad esempio consideriamo un termometro clinico a mercurio la cui colonnina si alza di 10 cm (la *lunghezza di scala*) quando l'indicazione varia fra la temperatura minima di 35 e e la massima di 42 °C (*estensione di scala* di 7 °C). Poiché la curva di risposta è lineare, la sensibilità del termometro è di 1.43 cm/°C.

Non sempre una variazione dello stimolo si ripercuote in una variazione della risposta. A volte, ad esempio a causa di attriti, l'ingresso può variare senza produrre variazioni della risposta. Si definisce allora *soglia di discriminazione* la più grande variazione di segnale di ingresso che non provoca variazione percepibile della risposta, a condizione che la variazione sia lenta e monotòna. Quando invece si considera l'intervallo massimo all'interno del quale si può far variare il segnale di ingresso nei due sensi senza provocare variazione della risposta si parla di *zona morta*. A volte si aumenta volontariamente la zona morta per evitare la variazione di risposta dovuta a piccole variazioni dell'ingresso. Un buon esempio, anche se non direttamente legato alle misure, è quello del volante di un'auto. Lo stimolo è la rotazione del volante. La risposta è il cambiamento di direzione delle ruote. Per evitare variazioni continue di direzione dovuto a piccoli movimenti delle mani viene appositamente progettata una zona morta tale che una piccola rotazione iniziale del volante non provoca alcun cambiamento di direzione delle ruote.

A volte invece non si osserva una variazione della risposta dello strumento, anche se essa può essersi verificata, in quanto non percepibile. La caratteristica dello strumento legata a questa eventualità è la *risoluzione*. Essa è definita come la più piccola differenza di indicazione di un dispositivo che può essere percepito in maniera significativa. Mentre nel caso di scale digitali la risoluzione è uguale all'incremento digitale, nel caso di scale analogiche essa dipende dall'osservatore, dalla spaziatura della scala e dalle condizioni di lavoro ed è generalmente dell'ordine "dei decimi" di intervallo di scala (ovvero della variazione di valore corrispondente ad una divisione). Ad esempio viene comunemente accettato che uno sperimentatore possa risolvere la posizione di una divisione con una risoluzione di 1/5 di divisione, ovvero che egli possa decidere con la "quasi certezza" se l'ago è all'interno di un intervallino di larghezza 0.2 divisioni. È quindi raccomandabile di provare a stimare i decimi e di dare successivamente alla lettura un'incertezza che dipende dalla propria capacità di stima (vedi 2.2).

È da notare inoltre l'uso pecululiare del termine risoluzione, analogo a quello di precisione: minore è la grandezza che si riesce a risolvere, maggiore

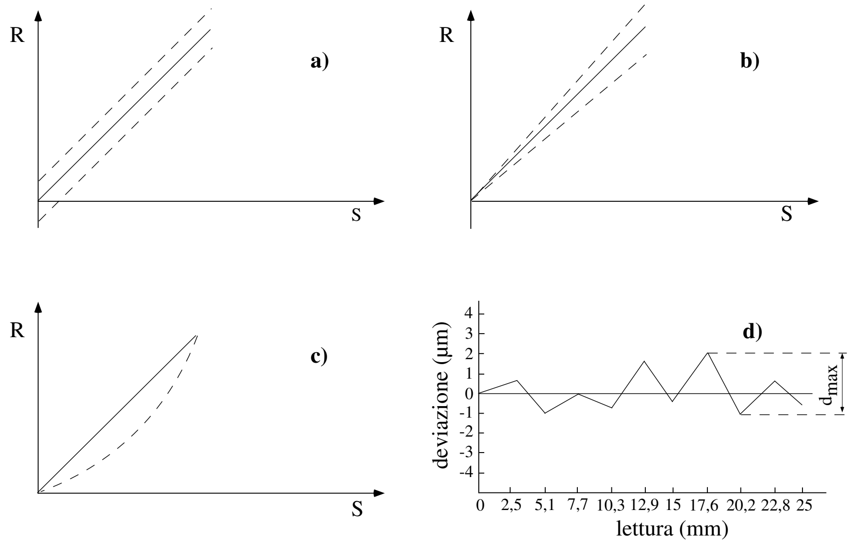



Figura 8.9: Alcuni tipi di errori sistematici di strumenti: a) errore di zero; b) errore di scala; c) deviazione dalla linearità; d) caso di più difficile modellizzazione.

è la risoluzione dello strumento. Ad esempio, un microscopio elettronico ha una risoluzione molto maggiore di un microscopio ottico.

### 8.10.3 Errori degli strumenti di misura

Tutti i concetti relativi agli errori di misura si applicano, come caso particlare, agli strumenti, intendendo che gli errori di misura degli strumenti costituiscono il contributo dello strumento all'errore globale. La figura 8.9 mostra alcuni errori tipici degli strumenti.

## 8.11 Correzione di errori sistematici

A volte può essere necessario *aggiustare* un determinato strumento di misura, cioè intervenire su di esso in modo tale da ridurre gli errori di misura[12]. L'operazione di aggiustamento altera, nella maggior parte dei casi permanentemente, lo strumento di misura. Si intende invece per *calibrazione* lo stabilire gli errori di misura di un certo strumento, cioè la differenza fra il valore da esso indicato e il valore di riferimento. A differenza dell'*aggiustamento*, la calibrazione non richiede un intervento materiale sullo strumento. Nel caso di strumenti con indicatore (un ago su una scala) il risultato della calibrazione consiste nel determinare l'errore di misura, ovvero la differenza fra il valore indicato e il valore di riferimento. Nel caso di *misure materiali*, o *campioni di*

[12] È da notare che a volte si incontra il termine "calibrazione" utilizzato per indicare l'operazione di aggiustamento.
Per *taratura* si intende invece l'operazione mediante la quale, applicando allo strumento sollecitazioni note, si determina la corrispondenza fra i valori dell'uscita e la grandezza da misurare.

*misura*[13] (ad esempio un metro, un peso campione, una resistenza campione, etc.) il risultato della calibrazione consiste nel trovare la differenza fra il valore di riferimento e quello indicato su di esso.

Facciamo un esempio pratico che aiuta a capire la differenza fra aggiustare e calibrare. Se sappiamo che il nostro orologio va avanti di 3 minuti, possiamo rimetterlo ("aggiustare") all'ora esatta o possiamo semplicemente tener conto di questo errore e sottrarre 3 minuti da tutte le letture successive.

## 8.12 Esempi

### 8.12.1 Dipendenza delle caratteristiche del termometro a mercurio dai suoi parametri costruttivi

Consideriamo un termometro a mercurio avente volume del bulbo $V_\circ$, sezione del capillare $A$. Indichiamo con $\rho$ la densità del mercurio, con $c$ il suo calore specifico con $\alpha$ il suo coefficiente di dilatazione termico (volumetrico) e con $\delta$ un parametro che quantifica la facilità con cui il calore è scambiato fra fra mercurio e fluido in cui il termometro è immerso. Il parametro $\delta$ dipende quindi dalla superficie di contatto, dallo spessore della parete di vetro e dalla conducibilità termica del vetro, del mercurio e del fluido. Ricordiamo inoltre che il volume del bulbo è molto maggiore di quello del capillare. Valutiamo quindi sensibilità, prontezze ed errore sistematico dovuto alla capacità finita del sistema da misurare.

#### Sensibilità

Una variazione di temperatura $dT$ produce un aumento di volume $dV = \alpha\, V_\circ\, dT$, che si riflette, a sua volta, in un innalzamento $dh = dV/A$ della colonnina. Poiché la risposta dello strumento corrisponde è legata proprio alle variazioni di altezza della colonnina abbiamo che la sensibilità è data da

$$S = \frac{d\,\text{Risposta}}{d\,\text{Stimolo}} = \frac{dh}{dT} = \frac{\alpha\, V_\circ}{A}\,,$$

ovvero essa è proporzionale al volume del bulbo, al coefficiente di dilatazione termica, mentre è inversamente proporzionale alla sezione del capillare.

#### Prontezza

Il calore scambiato nell'unità di tempo da un termometro con il fluido in cui è immerso è proporzionale alla differenza istantanea di temperatura fra termometro e fluido:

$$dQ = \delta \cdot (T_F - T) \cdot dt, \tag{8.10}$$

dove $T$ rappresenta la temperatura istantanea del termometro e $T_F$ quella del fluido (quest'ultima è supposta costante durante le misure). In consequenza dello scambio di calore il termometro subisce una variazione di temperatura proporzionale al calore scambiato e inversamente proporzionale alla sua

[13] Nel testo inglese delle norme DIN compare come *material measure*.

capacità termica:

$$dT = \frac{dQ}{c\,\rho\,V} = \frac{dQ}{C}\,, \tag{8.11}$$

dove $C$ rappresenta la capacità termica del termometro. Combinando la (8.10) con la (8.11) si trova l'equazione differenziale che descrive l'evoluzione nel tempo della temperatura del termometro:

$$C\frac{dT}{dt} = \delta \cdot (T_F - T), \tag{8.12}$$

la cui soluzione è:

$$\ln \frac{T_F - T(t)}{T_F - T_\circ} = -\frac{t}{\tau}, \tag{8.13}$$

dove si è chiamato $\tau$ il rapporto $\frac{C}{\delta}$. Dalla (8.13) segue:

$$T(t) = T_F - (T_F - T_\circ) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\,, \tag{8.14}$$

con $T_\circ$ la temperatura del termometro all'istante $t = 0$ di inizio delle misure (che non è necessariamente l'istante di immersione del termometro nel fluido). Il parametro $\tau$ che interviene in andamenti esponenziali è genericamente chiamato *costante di tempo* del termometro e ha il significato fisico di tempo impiegato affiché la differenza fra il valore della grandezza fisica e il suo valore asintotico si riduca di $1/e$. Nel nostro caso esso rappresenta quindi il tempo che occorre al termometro per ridurre di $1/e$ ($\approx 37\%$) la differenza di temperatura iniziale rispetto al fluido (supposto di capacità termica infinita). Ponendo $t = \tau$ nella (5) si ottiene infatti:

$$T(\tau) - T_F = \frac{1}{e}(T_\circ - T_F)\,. \tag{8.15}$$

Tanto minore è $\tau$ quanto è maggiore la prontezza del termometro. La prontezza è quindi proporzionale alla conducibilità termica del sistema termometro-fluido e inversamente proporzionale alla capacità termica del termometro, ovvero al volume del bulbo.

**Capacità del termometro confrontabile con quella del sistema**

Le considerazioni del punto precedente assumevano una capacità $C_x$ termica del sistema da misurare "infinità", ovvero molto maggiore di quella del termometro. Se questa condizione non è valida il termometro non si porterà alla temperatura del sistema, ma ad una temperatura intermedie fra quelle iniziali data da

$$T_F' = \frac{C_x T_F + c\rho V_\circ T_\circ}{C_x + c\rho V_\circ}$$

(vedi anche figura 8.6).

### 8.12.2 Sensibilità di una misura di capacità termica

### 8.12.3 Sensibilità di una misura di resistenza mediante ponte di Weathstone

## 8.13 Problemi

1. "Pesa di più un chilo di piombo o un chilo di paglia"? è un vecchio scherzo per bambini, ma se non si sta attenti alla definizione operativa di "pesare" il risultato è sorprendende per i grandi. Formulando la domanda in altri termini, se si pongono su una bilancia analitica ( *** controllare che sia la cosa giusta *** ) ( intervallo di scala di $1\,mg$ ) $5\,g$ di piombo e successivamente $5\,g$ grammi di polistirolo in quale delle due pesate si leggerà il valore più grande?

2. Continuando l'esempio precedente: si vuole determinare la densita' di un materiale, eseguendo una misura di volume e una di massa. Supponendo di effettuare le pesate con una bilancia analitica in aria, determinare la correzione da apportare al valore della densità calcolato dalla formula $\rho = M/V$ per tener conto dell'effetto della spinta di Archimede.

3. Variazione di $g$ con l'altezza: dopo quanti metri bisogna ricalibrare la bilancia?

4. Utilizzando il periodo di oscillazione di un pendolo si effettuano 3 misure di accelerazione di gravità, la prima all'equatore, la seconda a Roma ( 42... gradi di latitudine ) e una al Polo Nord. I tre valori ottenuti sono: ( *** vedi Kohlrausch *** ).
   Determinare i valori corretti per l'effetto di rotazione della Terra.

5. Un termometro clinico ha una scala in cui le tacche che corrispondono a 36 $^\circ C$ e a 40 $^\circ C$ distano 5 cm e ha un intervallo di scala di $0.2\,^\circ C$. Un termometro di laboratorio ha una scala in cui le tacche che corrispondono a $0\,^\circ C$ e a $100\,^\circ C$ distano 30 cm e ha un intervallo di scala di $0.2\,^\circ C$. Quale dei due termometri è più sensibile? Quale dei due termometri è più preciso?( ** a questa domanda non si può rispondere ).

6. Sensibilità del termometro.

7. Errore sistematico del termometro.

8. Prontezza del termometro.

9. 20 gruppi di studenti eseguono la misura del calore specifico dell'alluminio utilizzando due metodi diversi. I valori medi e e le deviazioni standard ottenute nei due gruppi sono rispettivamente ( in $cal \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$ ) $\overline{x}_1 = 0.210$, $\sigma_1 = 0.075$, $\overline{x}_2 = 0.235$ e $\sigma_2 = 0.028$. Le tabelle danno un valore del calore specifico dell'alluminio di $0.200\,cal \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$. Quale dei due metodi è più preciso? Quale è più accurato?

10. Si esegue una misura di massa con una bilancia meccanica a due bracci posta sotto vuoto. La massa incognita ($M_x$) viene posta in un piatto, mentre dall'altra si pone una massa nota ($M-1$), finché la bilancia non raggiunge l'equilibrio. Scambiando i piatti si osserva che l'equilibrio è raggiunto con una campione diversa ($M_2$). Quant'è la migliore stima della massa incognita?

11. Sul problema precedente: quanto vale il rapporto fra le lunghezze dei due bracci della bilancia?