# Le basi del metodo sperimentale
# – un'introduzione pratica –

G. D'Agostini
Dipartimento di Fisica, Università "La Sapienza", Roma

1 febbraio 2001

© G. D'Agostini 2000

# Indice

© G. D'Agostini 2000

© G. D’Agostini 2000

© G. D'Agostini 2000

© G. D'Agostini 2000

© G. D'Agostini 2000

# Parte IV

# Applicazioni dell'inferenza statistica

# Capitolo 9

# Considerazioni generali sulla valutazione dell'incertezza di misura

Da questo capitolo cominciamo a trattare quantitativamente le incertezze di misura. Questo sarà fatto utilizzando il linguaggio della probabilità, sia che le incertezze siano originate da errori statistici che sistematici, consistentemente con l'approccio seguito in questo testo di associare la probabilità allo stato di incertezza. Sebbene si raccomandi una certa familiarità con i concetti della probabilità e dell'inferenza statistica, la trattazione ha un carattere introduttivo all'argomento e molti dei metodi a cui arriveremo saranno ottenuti con argomenti euristici e intuitivi.

## 9.1 Breve richiamo dei concetti di probabilità

Prima di procedere alle applicazioni, ricordiamo brevemente la terminologia sulle variabili casuali.

- Sostanzialmente si assume che il concetto di probabilità sia primitivo, ovvero vicino a quello del senso comune.

- Detto altrimenti, la probabilità è una *misura del grado di fiducia* (o di credenza, in inglese *degree of belief*) che una qualsiasi affermazione risulti essere vera.

- Il valore di probabilità va da 0 a 1 per affermazioni che vanno dall'impossibile al certo.

- Siccome quanto più si crede che una certa affermazione sia vera, tanto più si è disposti a scommettere su di essa, la *scommessa "coerente"* può essere utilizzata per definire operativamente il valore di probabilità.

- Una *variabile casuale*, o *numero aleatorio*, è qualsiasi numero rispetto al quale si è in stato di incertezza. Facciamo due esempi nel contesto delle misure:

1. Pongo un chilogrammo campione su una bilancia di laboratorio con indicazione (digitale) dei centesimi. Che valore leggerò (in grammi)? 1000.00, 999.95, 1000.03 ...?
2. Leggo su una bilancia di laboratorio 2.315 g. Quanto vale il valore vero della massa del corpo? 2.311, 2.312, ... 2.315, ... 2.319, ...?

Nel primo caso la variabile è la lettura $x$ (subordinatamente ad un certo valore vero); nel secondo caso la variabile è il valore vero $\mu$ (subordinatamente ad un certo valore letto).

- Ai possibili valori della grandezza viene associata una funzione $f(x)$ che quantifica il grado di fiducia ad essi assegnato. Quindi scrivere che $f(x_1) > f(x_2)$ sta ad indicare che si crede più a $x_1$ che a $x_2$. A seconda che la variabile $x$ sia *discreta* o *continua*, $f(x)$ ha l'accezione di *funzione di probabilità* o di *funzione densità di probabilità*.

- Tutte le distribuzioni di variabile casuale sono subordinate ad un certo stato di informazione. Utilizzando i due esempi precedenti possiamo perciò scrivere

$$\begin{aligned} f(x) \quad &\longrightarrow \quad f(x\,|\,\mu = 1000.00) \\ f(\mu) \quad &\longrightarrow \quad f(\mu\,|\,x = 2.315)\,, \end{aligned}$$

ove "|" si legge "dato", "subordinatamente a", etc.

- L'intero stato di incertezza sui valori della grandezza di interesse è espresso da $f(\mu)$. Da questa funzione è possibile calcolare la probabilità che la grandezza abbia un valore compreso in un certo intervallo. Per semplicità, spesso si riassume lo stato di informazione di $f(\cdot)$ in due soli numeri: $\mathrm{E}(\cdot)$ e $\sigma$. È interessante l'interpretazione conoscitiva di queste due grandezze. Esse possono essere viste come la *previsione* e l'*incertezza di previsione* del numero aleatorio.

- Fra le distribuzioni di probabilità, quella più importante per la trattazione delle incertezze di misura è indubbiamente la ben nota *gaussiana*, che assumiamo nota. Altre distribuzioni interessanti per le applicazioni sono la *distribuzione uniforme* e la *distribuzione triangolare*. Ricordiamo soltanto che la deviazione standard standard di queste due distribuzioni in funzione della loro semilarghezza $\Delta$ vale

$$\sigma(\text{distr. uniforme}) = \frac{2\,\Delta}{\sqrt{12}} = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \tag{9.1}$$

$$\sigma(\text{triangolare}) = \frac{\Delta}{\sqrt{6}}\,. \tag{9.2}$$

## 9.2 Valutazione dell'incertezza di misura: schema generale

Avendo presentato tutti gli ingredienti necessari, vediamo come sviluppare una teoria delle incertezze di misure. Nei prossimi paragrafi affronteremo il pro-

© G. D'Agostini 2000

blema a diversi gradi, cercando di limitare il formalismo e le complicazioni matematiche.

1. Il primo passo consiste nella valutazione dello stato di incertezza su una grandezza misurata *direttamente*, ossia il cui valore sia letto su uno strumento, senza compiere altri calcoli. Si terrà conto del fatto che a volte possono essere eseguite più misure indipendenti sullo stesso misurando nelle stesse condizioni.

   Prima di passare alla parte puramente applicativa sono necessarie ancora delle premesse di carattere generale sul processo di apprendimento. Dobbiamo infatti:

   - capire cosa vuol dire, dal punto di vista generale, riaggiornare lo stato di incertezza sul valore del misurando;
   - introdurre brevemente il problema delle inversioni di probabilità, ovvero di come passare dalla distribuzione di probabilità dell'osservabile alla distribuzione di probabilità della grandezza fisica;
   - accennare al meccanismo di aggiornamento bayesiano;
   - risolvere in modo intuitivo, anziché formale, l'apprendimento bayesiano nel caso di semplici problemi di routine.

2. Il secondo passo consiste nel propagare l'incertezza su grandezze misurate direttamente a grandezze misurate indirettamente. Anche in questo caso ci accontenteremo di medie e deviazioni standard.

3. Il terzo passo riguarda la trattazione delle incertezze dovute ad errori sistematici di valore ignoto. Questo non è altro che un aspetto particolare della propagazione delle incertezze (sulle costanti di calibrazioni e altri fattori di influenza). Bisognerà però tenere conto dei seguenti fatti:

   - innanzitutto occorre convincersi che, anche se le incertezze sulle costanti di calibrazioni sono spesso descritte da un modello non gaussiano e valutate in modo abbastanza approssimativo, si può arrivare a distribuzioni finali gaussiane;
   - in secondo luogo, le correlazioni indotte dagli errori sistematici su diverse grandezze misurate con lo stesso strumento rendono complicato il calcolo della propagazione delle incertezze. Occorre quindi trovare delle scorciatoie per risolvere il problema, almeno nei casi semplici, e indicare una via generale (magari approssimativa).

4. Sarà quindi introdotta la classificazione BIPM/ISO delle incertezze di misura in tipo $A$ e tipo $B$, facendo notare la coerenza con quanto sviluppato in questo scritto.

5. Come ultimo passo, considereremo la determinazione dei parametri della retta che meglio si adatta ai punti sperimentali. Nonostante la tendenza attuale di delegare tali compiti a programmi automatici su computer, raccomanderemo l'uso dell'analisi grafica, più istruttiva delle scatole nere informatiche e che possono portare a risultati numerici confrontabili a quelli ottenibili con “fit mediante i minimi quadrati”.

© G. D'Agostini 2000

## 9.3 Imparare dagli esperimenti: il problema dell'induzione

Ogni misura è eseguita lo scopo di accrescere la conoscenza di chi la esegue e di chi ha interesse a quella specifica conoscenza. Questi possono essere una certa comunità scientifica, un medico che ha prescritto una certa analisi o un commerciante che deve acquistare un prodotto. È anche chiaro che la necessità stessa di eseguire misure indica che ci si trovava in uno stato di incertezza su qualcosa di interesse. Questo "qualcosa" può essere una costante fisica o una teoria sull'origine dell'universo; lo stato di salute di un paziente; la composizione chimica di un nuovo prodotto. In tutti i casi la misura ha lo scopo di *modificare* un certo stato di conoscenza.

Si sarebbe tentati di dire addirittura "acquisire", anziché "modificare", lo stato di conoscenza, come ad indicare che la conoscenza possa essere creata dal nulla nell'atto della misura. Non è difficile convincersi, invece, che nella maggior parte dei casi si tratta invece soltanto di un aggiornamento alla luce di fatti nuovi e di un certo raziocinio. Prendiamo ad esempio la misura della temperatura di una stanza, effettuata con un termometro digitale - tanto per escludere contribuiti soggettivi alla lettura dello strumento - e supponiamo di ottenere 21.7 °C. Anche se si potrà dubitare del decimo di grado, indubbiamente la misura è servita a restringere l'intervallo di temperature ritenute plausibili prima della misura - quelle compatibili con la sensazione di "ambiente confortevole". In base alla conoscenza del termometro usato, o dei termometri in generale, ci saranno valori di temperatura in un certo intervallo intorno a 21.7 °C ai quali crediamo di più e valori al di fuori ai quali crediamo di meno.

È però altresì chiaro che se il termometro avesse indicato, a parità di sensazione fisiologica, 17.3 °C si sarebbe tentati a ritenere che esso non funzioni bene. Non si avrebbero invece dubbi sul suo malfunzionamento se avesse indicato 2.5 °C!

I tre casi corrispondono a tre diversi gradi di aggiornamento della conoscenza. Nell'ultimo caso, in particolare, l'aggiornamento[1] è nullo.

Il processo di apprendimento dalle osservazioni sperimentali è chiamato dai filosofi *induzione*. Probabilmente a molti lettori sarà anche noto che in filosofia esiste l'irrisolto "problema dell'induzione" dovuto alla critica di Hume a tale processo. Questa può essere sintetizzata affermando che l'induzione non è "giustificata", nel senso che è impossibile dimostrare, con la stessa forza di un teorema matematica, che da certe osservazioni possano seguire *necessariamente* determinate conclusioni scientifiche. L'approccio probabilistico che abbiamo appena intrapreso sembra essere l'unica via d'uscita a tale critica[2].

[1] Ma anche in questo caso si è imparato qualcosa, cioè che il termometro non funziona...

[2] Molto spesso si pensa che l'unico metodo scientifico valido sia quello della falsificazione. Non ci sono dubbi che, se una teoria non è in grado di descrivere i risultati di un esperimento, essa vada scartata o modificata. Ma poiché non è possibile dimostrare la certezza di una teoria, diventa impossibile decidere fra tutte le (infinite) ipotesi non falsificate. Il metodo probabilistico permette di fornire una scala di credibilità a tutte le ipotesi considerate (o rapporti di credibilità fra ogni coppia di ipotesi). Un caso in cui il metodo di falsificazione è completamente inadeguato è quello relativo agli incertezze di misura. Infatti, prendendo alla lettera tale metodo, si sarebbe autorizzati soltanto a verificare se il valore osservato sullo strumento è compatibile o no con un valore vero, niente di più. Si capisce come, con queste premesse, non si possa fare

© G. D'Agostini 2000

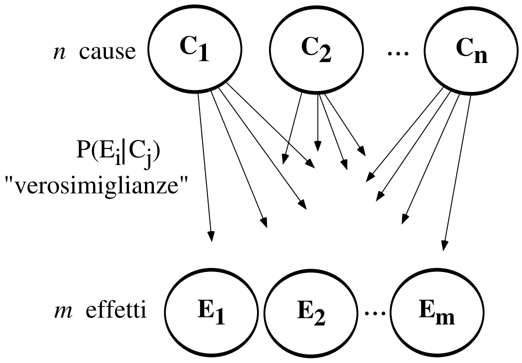


Figura 9.1: Relazioni cause-effetti viste in termini di condizionanti e eventi condizionati

## 9.4 Dalla probabilità degli effetti alla probabilità delle cause

Per formalizzare il discorso appena fatto, occorre associare variabili casuali sia ai possibili valori delle grandezze fisiche che ai valori osservabili sullo strumento. Fatto ciò, si tratterà di imparare come inferire la distribuzione di probabilità del valore vero, ossia come valutare, per ogni possibile valore della grandezza, un corrispondente grado di fiducia.

### 9.4.1 Verosimiglianza

Cominciamo con la distribuzione di probabilità dei valori osservabili, indicati con $x$. Come detto,

$$f(x \mid \mu)$$

sta per la funzione densità di probabilità ($x$ è una variabile continua, dal punto di vista pratico) di osservare[3] un certo valore $x$, dato un determinato valore vero $\mu$. Tutti i possibili valori di $\mu$ possono essere visti come le infinite *cause* responsabili del valore $x$ osservato (il loro *effetto*). La figura 9.1 dovrebbe aiutare ad illustrare il problema.

La funzione $f(x \mid \mu)$ ci dà la verosimiglianza che $\mu$ possa causare $x$ e per questo è chiamata semplicemente *verosimiglianza*. Essa va stimata dalla conoscenza del comportamento dello strumento e, più in generale, dell'insieme di tutte le procedure di misura. Molto spesso si utilizza per la verosimiglianza un modello gaussiano, giustificato un po' dall'esperienza e soprattutto dalle aspettative teoriche, basate sul teorema del limite centrale. Consideriamo,

molta strada.

[3]Attenzione a non confondere la probabilità di osservare un certo valore $x$, subordinatamente ad un certo valore di $\mu$, con la probabilità del valore che è stato effettivamente osservato. Essendo questo un numero certo (a meno di non essere ubriachi), ad esso non si applica il concetto di probabilità. Così pure, si faccia attenzione a non chiamare $f(x \mid \mu)$ "probabilità che $x$ venga da $\mu$" (il nome corretto - trascurando il fatto inessenziale che si tratta di una densità di probabilità e non di una probabilità - è "probabilità di $x$, dato un certo valore $\mu$", che è chiaramente ben altra cosa!).

© G. D'Agostini 2000

quindi nel seguito, per semplicità, una verosimiglianza del tipo

$$f(x\,|\,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{9.3}$$

con $\sigma$ che non dipende dal valore di $\mu$ (stiamo assumendo che lo strumento risponda nello stesso modo a tutti i possibili valori di $\mu$).

### 9.4.2 Probabilità iniziale e probabilità finale

Una volta fissata la funzione di verosimiglianza e un valore osservato $x$, si tratta di costruire la $f(\mu\,|\,x)$. Per arrivare in modo euristico alla formula generale, consideriamo soltanto due possibili valori di $\mu$. Se, in base alle nostre conoscenze, riteniamo i due valori ugualmente probabili, ci sembrerà naturale protendere per il valore per il quale la verosimiglianza di osservare $x$ è maggiore. Ad esempio, se $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 10$ e $x = 2$, si è tentati a credere che l'osservazione sia dovuta più verosimilmente alla causa $\mu_1$ che alla causa $\mu_2$. Se però la grandezza di interesse è definita positiva, la causa $\mu_1$ crolla da causa più probabile a causa impossibile. Ci sono poi casi intermedi in cui, per motivi legati all'esperienza precedente, si tende a credere *a priori* più ad una causa che all'altra. Ne segue che il grado di fiducia risultante di un certo valore di $\mu$ sarà proporzionale sia alla verosimiglianza che esso produca il valore osservato che al grado di fiducia che si attribuiva a $\mu$ prima dell'osservazione[4]:

$$f(\mu\,|\,x) \propto f(x\,|\,\mu)\cdot f_\circ(\mu)\,. \tag{9.4}$$

Questo è uno dei modi di scrivere il teorema di Bayes, che ha un ruolo centrale nelle inferenze probabilistiche. L'inessenziale fattore di proporzionalità è ricavato dalla condizione di normalizzazione (l'integrale su tutti i possibili valori di $\mu$ deve dare 1). $f_\circ(\mu)$ è chiamata distribuzione *iniziale*, o *a priori* (o più sinteticamente, in inglese, *"prior"*) mentre $f(\mu\,|\,x)$ è la distribuzione *finale*, o *a posteriori*, ove il "prima" e il "dopo" è rispetto alla nuova osservazione $x$ e non è da intendersi in modo strettamente temporale. La funzione $f_\circ(\mu)$ riassume lo stato di incertezza su $\mu$ alla luce di tutte le conoscenze a disposizione, a parte il verificarsi del dato sperimentale $x$. Quindi distribuzione iniziale e finale dovrebbero essere scritte, più precisamente come:

$$\begin{aligned} f_\circ(\mu) &\;\rightarrow\; f(\mu\,|\,I_\circ) \\ f(\mu\,|\,x) &\;\rightarrow\; f(\mu\,|\,x, I_\circ)\,. \end{aligned}$$

## 9.5 Paura dei "pregiudizi"? Inevitabilità di principio e frequente irrilevanza pratica delle prior

Molti possono rimanere perplessi al pensiero che le conclusioni scientifiche possano dipendere dal "pregiudizio" sulla grandezza fisica ("pregiudizio" ha

[4]Si noti l'uso dello stesso simbolo $f(\cdot)$ per indicare funzioni di diverse variabili, anche se sarebbe formalmente più corretta una scrittura della (9.4) del tipo:

$$\varphi(\mu\,|\,x) \propto \mathcal{L}(x\,|\,\mu)\cdot\pi(\mu)\,,$$

con $\varphi(\cdot)$, $\mathcal{L}(\cdot)$ e $\pi(\cdot)$ che ricordano dal nome, rispettivamente, la finale, la verosimiglianza (in inglese likelihood) e la prior.

© G. D'Agostini 2000

correntemente un significato prevalentemente negativo, ma in realtà significa semplicemente un giudizio a priori, basato su una esperienza precedentemente acquisita). Non potendo addentrarci con la dovuta profondità in questo aspetto interessante del problema, aggiungiamo alcune note esplicative. Premettiamo una citazione di Poincaré[5], non tanto per tentare di convincere mediante il principio di autorità, quanto perché il concetto è espresso con molta chiarezza.

> "Un effetto potrebbe essere prodotto dalla causa $a$ o dalla causa $b$. L'effetto è appena stato osservato. Ci domandiamo la probabilità che sia dovuto alla causa $a$. Questa è una probabilità di causa *a posteriori*. Ma non la potrei calcolare, se una convenzione più o o meno giustificata non mi dicesse in anticipo qual'è la probabilità *a priori* che la causa $a$ entri in gioco".

Detto altrimenti, il contributo delle probabilità a priori è cruciale nei problemi di inferenza. Questo non deve però spaventare, in quanto:

- È assolutamente ragionevole trarre le conclusioni non in modo meccanico, ma alla luce della ragione.
- Nelle misure di routine l'intervallo di "accettanza a priori" dei possibili valori è talmente ampio, rispetto alla larghezza della verosimiglianza, che in pratica è come se tutti i possibili valori di $\mu$ fossero ritenuti a priori ugualmente possibili. La prior viene allora ad essere assorbita nella costante di normalizzazione:
$$f(x \mid \mu) \cdot f_\circ(\mu) \xrightarrow[\textit{prior molto vaga}]{} f(x \mid \mu)\,; \tag{9.5}$$
- Quando invece questo non è vero (ad esempio se si usa uno strumento con il quale non si ha confidenza, oppure se si deve valutare il risultato di una misura eseguita da persona inesperta) è assolutamente legittimo credere più ai propri pregiudizi che al dato empirico. È infatti molto più facile che uno studente sbagli la misura che scopra una nuova legge fisica. Poincaré fa un bell'esempio di questo tipo di valutazioni nel suo libro *"Scienza e ipotesi"* dal quale sono state tratte anche le altre citazioni. Racconta infatti delle molte soluzioni al problema della quadratura del cerchio sottoposte all'Accademia di Francia da sconosciuti e che venivano cestinate senza che neanche si perdesse tempo a vagliarle. Questo comportamento - commenta Poincaré - deriva dall'aver soppesato la probabilità a priori che "ci sia un pazzo più in Francia" con quella che uno sconosciuto potesse risolvere un problema sul quale avevano fallito eminenti matematici.

## 9.6 Scorciatoia al ragionamento bayesiano: il cane e il cacciatore

Terminiamo questa succinta introduzione all'inferenza bayesiana mostrando un ragionamento intuitivo che aiuta a capire meglio cosa si intenda per in-

[5] H. Poincaré, *"Scienza e Ipotesi"*, molto interessante il capitolo XI sul calcolo delle probabilità.

© G. D'Agostini 2000

versione di probabilità e quindi ad accettare con serenità il contributo delle probabilità a priori nelle inferenze.

Consideriamo un cacciatore che si aggira in un bosco con il suo cane sempre in continuo movimento intorno a lui. Supponiamo che la probabilità che il cane si trovi entro un raggio di 100 m dal cacciatore sia del 50 %. Osserviamo il cane in una certa posizione: cosa possiamo dire sulla p[osizione dove si trova il cacciatore? Nessuno esiterà a dire che, al 50 %, si troverà entro 100 m dal cane. Chiaramente il cacciatore sta per $\mu$ e il cane per l'osservazione $x$. Ma non è difficile convincersi che per arrivare in modo intuitivo a questo risultato, si sta tacitamente assumendo che il cacciatore possa essere, a priori, in ogni punto del bosco. Le cose cambiano se il cane sta costeggiando un fiume, se corre in una certa direzione con la preda in bocca o se è dentro un terreno recintato (ad esempio a oltre 100 metri dal filo spinato) in cui lui può entrare e il cacciatore no. Detto più chiaramente, si sta assumendo una *distribuzione iniziale uniforme* (del cacciatore nella foresta) e una verosimiglianza simmetrica. Ogni variazione da questo modello porta a conclusioni diferenti. Nel seguito considereremo semplici misure di routine in cui il modello cacciatore$\rightarrow$cane e cane$\rightarrow$cacciatore funziona secondo l'inversione intuitiva che abbiamo descritto. Ci sono però dei problemi (specialmente in ricerca di frontiera) in cui questo è tutt'altro che vero.

## 9.7 Imparare dall'esperienza

A questo punto cerchiamo di ricapitolare, senza formule, cosa abbiamo imparato:

> *la qualità della conoscenza di una grandezza fisica, dopo aver effettuato delle osservazioni sperimentali, dipende dalla verosimiglianza che un valore della grandezza possa aver prodotto le osservazioni e da quanto si sapeva a priori sulla grandezza fisica (prima delle nuove osservazioni)* .

Analizziamo i due contributi:

- la verosimiglianza descrive lo stato di conoscenza su
  - strumentazione;
  - condizione ambientali e fattori di influenza;
  - contributo dello sperimentatore
  - etc. etc. (vedi "decalogo" ISO al paragrafo 8.6)
- la prior sui possibili valori della grandezza fisica implica una buona conoscenza della fenomenologia sulla quale si sta investigando.

Quindi l'insegnamento di fondo di questo approccio si riconduce a quello che tutti i fisici sanno già:

> *per ottenere risultati scientifici di qualità è necessario avere familiarità con tutti gli aspetti sperimentali della misura e una approfondita conoscenza della fisica.*

© G. D'Agostini 2000

È soltanto il bilanciamento fra questi due contributi che permette di accettare un risultato, confrontarlo con altri, ripetere le misure, calibrare la strumentazione, etc., e, in conclusione, produrre risultati utili per la comunità scientifica.

Si noti quanto sia cruciale il ruolo normativo della scommessa coerente. Essa infatti estirpa dal campo di lavoro tutte le contaminazioni dogmatiche (regola della mezza divisione, etc), responsabilizza lo sperimentatore sulle proprie affermazioni e, in ultima analisi, fa appello alla sua onestà scientifica. Se qualcuno afferma, ad esempio, che, al 68 %, un tavolo è lungo $120.00 \pm 0.08$ mm, deve sentirsi sicuro di questa affermazione quanto lo è della possibilità di estrarre una pallina bianca da una scatola che contiene 68 palline bianche e 32 nere. Se lo è di più (come spesso capita) o di meno vuol dire che è disonesto, nel senso che è cosciente che la sua affermazione trarrà in inganno gli eventuali utilizzatori del suo risultato.

È interessante citare il seguente avvertimento della *Guida* ISO, in linea con quanto detto:

> "Although this *Guide* provides a framework for assessing uncertainty, it cannot substitute for critical thinking, intellectual honesty, and professional skill. The evaluation of uncertainty is neither a routine task nor a purely mathematical one; it depends on detailed knowledge of the nature of the measurand and of the measurement. The quality and utility of the uncertainty quoted for the result of a measurement therefore ultimately depend on the understanding, critical analysis, and integrity of those who contribute to the assignment of its value".

## 9.8 ❄ Teorema di Bayes e probabilità delle ipotesi

Come premesso nel paragrafo 9.6, nel seguito cercheremo di utilizzare ove possibile metodi approssimativi. È interessante mostrare in un esempio pratico il processo di riaggiornamento della probabilità delle ipotesi, utilizzando l'esperimento simulato del contatore (vedi paragrafo 1.1). Nel paragrafo 7.3 abbiamo confrontato in dettaglio previsioni e dati simulati, assumendo che l'intensità del processo di Poisson sia pari a $r = 0.178$ conteggi/s. Questo valore era stato ricavato dai dati simulati a 300 s. Ma come facciamo ad essere sicuri che il valore numerico dell'intensità sia esattamente 0.178, invece di 0.1781, 0.1779, 0.179, 0.177, o un altro qualsiasi valore? Come nei casi precedenti, anche in questo caso abbiamo un numero aleatorio.

Dopo le osservazioni ci saranno dei valori ai quali crederemo di più e dei valori ai quali crederemo di meno. Facciamo qui alcuni esempi illustrativi, relativi alle misure di conteggio da 3 secondi, per le quali sono più semplici i conti.

### 9.8.1 Confronto fra due ipotesi

Supponiamo che, in base alla nostra conoscenza, le intensità del processo di Poisson $r_1 = 0.1779$ s e $r_2 = 0.1781$ s siano ugualmente probabili (ad esempio alla luce dei dati da 300 s che indicano $r = 0.178$ conteggi/s). A quale dei due

© G. D'Agostini 2000

crederemo di più qualora osservassimo la sequenza misurata? Per compattare la notazione, indichiamo con il vettore (o "n-tupla") $\underline{X}$ le possibili sequenze osservabili e con $\underline{x}$ la particolare sequenza che ci interessa. Applicando il *teorema di Bayes* nella forma che intervenire il rapporto delle verosimiglianze (il cosiddetto fattore di Bayes), abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{P(r_1 \,|\, \underline{x})}{P(r_2 \,|\, \underline{x})} &= \frac{P(\underline{x} \,|\, r_1)}{P(\underline{x} \,|\, r_2)} \times \frac{P_\circ(r_1)}{P_\circ(r_2)} \\ &= \frac{P(0 \,|\, r_1)^{56}\, P(1 \,|\, r_1)^{32} \cdot \cdots \cdot P(4 \,|\, r_1)^1}{P(0 \,|\, r_2)^{56}\, P(1 \,|\, r_2)^{32} \cdot \cdots \cdot P(4 \,|\, r_2)^1} \times 1\,, \end{aligned} \tag{9.6}$$

ove il fattore 1 deriva dall'equiprobabilità iniziale delle ipotesi. Si noti inoltre come saremmo arrivati alla stessa conclusione se, invece di considerare la probabilità della sequenza particolare, avessimo considerato la probabilità della distribuzione costituita da 56 volte zero conteggi, 32 volte un conteggio, 9 volte due conteggi, 2 volte tre conteggi e 1 volta quattro conteggi. Infatti le due verosimiglianze differiscono per lo stesso coefficiente multinomiale (che vale $0.7 \times 10^{42}$ in questo caso), il quale non dipende da $r$ e quindi si semplifica. Calcolando le probabilità che entrano nella (9.6), otteniamo il seguente rapporto di probabilità:

$$\frac{P(r_1 \,|\, \underline{x})}{P(r_2 \,|\, \underline{x})} = \frac{0.5864^{56} \cdot 0.3130^{32} \cdot 0.0835^9 \cdot 0.01486^2 \cdot 0.00198^1}{0.5861^{56} \cdot 0.3131^{32} \cdot 0.0837^9 \cdot 0.01490^2 \cdot 0.00199^1} = 0.993$$

I dati simulati da 3 secondi favoriscono quindi, anche se molto leggermente, il valore $r_2$. Se invece si confrontasse l'ipotesi $r_3 = 0.190$ conteggi/s contro $r_1$ si otterebbe (sembre assumendo $r_1$ e $r_3$ ugualmente possibili a priori):

$$\frac{P(r_1 \,|\, \underline{x})}{P(r_3 \,|\, \underline{x})} = \frac{0.5864^{56} \cdot 0.3130^{32} \cdot 0.0835^9 \cdot 0.01486^2 \cdot 0.00198^1}{0.5565^{56} \cdot 0.3224^{32} \cdot 0.0919^9 \cdot 0.0175^2 \cdot 0.00249^1} = 0.727\,,$$

ovvero quei dati simulati favoriscono abbastanza la terza ipotesi.

Prima di procedere al caso più generale di un numero infinito di ipotesi, vale la pena di fare un commento su alcuni errori tipici che si commettono quando si parla di probabilità di dati sperimentali e di probabilità di ipotesi.

- Innanzitutto bisigna fare attenzione a quando si parla di probabilità dei dati sperimentali. Essendo dati osservati, su di essi non c'è incertezza, e quindi la probabilità vale 1. Scrivere quindi, nel linguaggio che stiamo utilizzando, $P(\underline{x} \,|\, r_1)$ si riferisce, "genericamente", alla probabilità di osservare quella configurazione di dati sotto quella precisa ipotesi.

- Quando si parla di probabilità dei dati sperimentali data una certa ipotesi si può intendere "probabilità della particolare sequenza" o "probabilità del tipo di distribuzione a cui tale sequenza può dare luogo". Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, la differenza fra i due numeri può essere enorme ($0.7 \times 10^{42}$ nel caso che stiamo trattando), anche se per quanto riguarda l'inferenza tale fattore, dovuto al coefficiente multinomiale binomiale, si semplifica.

© G. D'Agostini 2000

- La probabilità di avere la sequenza $\underline{x}$ vale, per le tre ipotesi di $r$,

$$\begin{aligned} P(\underline{x}\,|\,r_1) &= 6.51 \times 10^{-46} \\ P(\underline{x}\,|\,r_2) &= 6.56 \times 10^{-46} \\ P(\underline{x}\,|\,r_3) &= 8.95 \times 10^{-46}\,, \end{aligned}$$

  ma non possiamo affermare, ad esempio, "la probabilità che la sequenza $\underline{x}$ sia dovuta a $r_1$ è uguale a $6.51 \times 10^{-46}$", perché altrimenti ci sarebbe una probabilità di $1 - 6.51 \times 10^{-46}$ che tale sequenza non sia dovuta a $r_1$. Infatti "esser dovuto a $r_1$" ha lo stesso significato di "il processo di Poisson di intensità $r_1$ è la causa della sequenza $\underline{x}$". Quindi, "la probabilità che la sequenza $\underline{x}$ sia dovuta a $r_1$" è pari a $P(r_1\,|\,\underline{x})$. È invece corretto dire "c'è una probabilità di $6.51 \times 10^{-46}$ che un processo di Poisson di intensità $r_1$ dia luogo alla (produca la) sequenza $\underline{x}$".

- Per calcolare la probabilità delle ipotesi bisogna passare necessariamente attraverso il teorema di Bayes e quindi attraverso le cosiddette "prior". Quindi, scrivendo esplicitamente le probabilità iniziali nel condizionante, possiamo avere i seguenti casi:

$$\begin{aligned} P(r_1\,|\,\underline{x}, P_\circ(r_1) = P_\circ(r_2) = 1/2) &= 0.498 \\ P(r_1\,|\,\underline{x}, P_\circ(r_1) = P_\circ(r_3) = 1/2) &= 0.421 \\ P(r_1\,|\,\underline{x}, P_\circ(r_1) = P_\circ(r_2) = P\circ(r_3) = 1/3) &= 0.296 \\ P(r_1\,|\,\underline{x}, P_\circ(r_1) = 1) &= 1\,. \end{aligned}$$

  Nel caso si stia affrontando un problema controverso e non ce se la sente di inserire delle probabilità a priori (necessariamente soggettive e, se il problema è controverso, per definizione fortemente dipendenti da persona a persona), la lista delle verosimiglianze per tutte le ipotesi di interesse rappresenta il modo più oggettivo di riportare il risultato dell'esperimento.[6]

### 9.8.2 Classe continua di ipotesi

Nel caso più generale $r$ potrebbe assumere, in principio, un qualsiasi valore reale intero. Associamo quindi ad essa una variabile casuale continua, i cui gradi di fiducia sono descritti da una funzione densità di probabilità $f(r)$. Applicando il teorema di Bayes valutiamo il riaggiornamento dei diversi gradi di fiducia alla luce dei dati $\underline{X} = \underline{x}$. A parte il solito fattore di normalizzazione, abbiamo

$$f(r\,|\,\underline{x}) \propto f(\underline{x}\,|\,r) \cdot f_\circ(r) \tag{9.7}$$

$$\frac{f(r\,|\,\underline{x})}{f_\circ(r)} \propto f(\underline{x}\,|\,r)\,. \tag{9.8}$$

[6]Si potrebbe obiettare: ma non è sufficiente riportare semplicemente i dati osservati? Se da questi il calcolo delle verosimiglianze è banale, allora non c'è nessun problema. Ma negli esperimenti complicati la dipendenza dei dati osservabili dall'ipotesi fisica può essere talmente complessa che solamente chi ha fatto l'esperimento è in grado di calcolare le verosimiglianze.

© G. D'Agostini 2000

Quest'ultimo modo di scrivere il teorema di Bayes è per rendere più esplicito il ruolo svolto dalla verosimiglianza $f(\underline{x}\,|\,r)$ per il riaggiornamento della probabilità. Per quanto riguarda $\underline{x}$, possiamo pensare sia alla particolare sequenza osservata (come effettivamente indicato da $\underline{x}$) o la distribuzione statistica ottenuta calcolando le frequenze dei diversi conteggi. Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, il risultato non cambia, in quanto la probabilità delle due differisce per il fattore multinomiale che, non dipendendo da $r$, può essere riassorbita nella costante di normalizzazione. Scrivendo le varie probabilità in funzione di $r$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
\frac{f(r\,|\,\underline{x})}{f_\circ(r)} &\propto \left(e^{-r\,T}\right)^{56}\cdot\left(e^{-r\,T}\,(r\,T)\right)^{32}\cdot\left(\frac{e^{-r\,T}\,(r\,T)^2}{2}\right)^{9}\cdot \qquad (9.9)\\
&\quad \left(\frac{e^{-r\,T}\,(r\,T)^3}{6}\right)^{2}\cdot\left(\frac{e^{-r\,T}\,(r\,T)^4}{24}\right)\\
&\propto e^{100\,r\,t}\,r^{(32+9\times 2+2\times 3+1\times 4)} \qquad (9.10)\\
&\propto e^{-N\,T\,r}\,r^{\sum_i n_i x_i}\,, \qquad (9.11)
\end{aligned}$$

dove, dal primo al secondo passaggio abbiamo eliminato tutti i fattori che non dipendono da $r$ e che quindi possono essere riassorbiti nella costante di proporzionalità. Inoltre, alla fine il risultato è stato riscritto nel modo più generale introducendo $n_i$, numero di occorrenze del risultato di ciascuna misura e $N = \sum_i n_i$, numero totale di misure.

Possiamo comunque calcolare abbastanza facilmente il valore per il quale tale espressione di $f(r\,|\,\underline{x})/f_\circ(r)$ ha un massimo, se usiamo il trucco di calcolare il massimo del suo logaritmo naturale. Chiamando quindi

$$l = \ln\left[e^{-N\,T\,r}\,r^{\sum_i n_i x_i}\right] = -N\,T\,r + \sum_i n_i x_i \ln r\,,$$

abbiamo che la condizione di minimo è data da

$$\frac{\partial\, l}{\partial\, r} = -N\,T + \frac{1}{r}\sum_i n_i x_i = 0\,,$$

dalla quale si ricava

$$r_M = \frac{1}{T}\frac{\sum_i n_i x_i}{N}\,. \qquad (9.12)$$

Il risultato finale è abbastanza semplice: il valore di $r$ che, in base a questi dati sperimentali, ha il maggiore <u>aumento di</u> grado di fiducia è quello corrispondente al numero medio di conteggi per unità di tempo. È esattamente il concetto intuitivo di cui abbiamo fatto uso per ricavare il valore di $r = 0.178$ conteggi al secondo dai dati di 300 s. Applicando questo risultato ai dati da 3 s otteniamo $r|_{T=3\,\mathrm{s}} = 0.200$ conteggi al secondo.

Terminiamo ricordando che questi due valori di $r$ non sono altro che quelli più favoriti dai due campioni di dati. Tuttavia anche altri valori, specialmente quelli "molto prossimi", sono supportati dai mdati. La figura 9.2 mostra il *fattore di aggiornamento relativo* ("a.r.") dei gradi di fiducia rispetto al massimo

© G. D'Agostini 2000

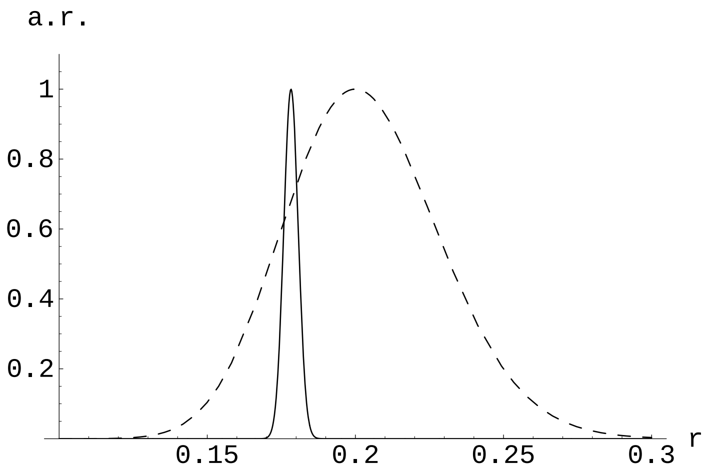


Figura 9.2: Fattore di aggiornamento relativo (rispetto al massimo) dell'intensità del processo di Poisson responsabile dei dati simulati del contatore. La linea continua si riferisce alle "misure" da 300 s, mentre quella tratteggiata si riferisce a quella da 3 s. Queste curve hanno la stessa forma della distribuzione di probabilità di $r$ condizionata dall'osservazione dei rispettivi dati, se si suppone una distribuzione iniziale uniforme ($f_\circ(r) = k$).

nel caso dei due campioni simulati (la linea continua per le misure da 300 s e quella tratteggiata per quelle da 3 s). Si vede come i risultati delle misure da 300 ci "costringono" a credere ad un ristretto intervallo di valori di $r$ intorno a 0.178, mentre le indicazioni delle misure da 3 s sono ancora molto più vaghe, nel senso che l'intervallo di valori "ragionevolmente possibili" è più ampio del caso precedente. Questo si vede ancora meglio dalla figura 9.3, in cui il fattore relativo di aggiornamento è mostrato su scala logaritmica.

Si noti che, a questo punto, il problema inferenziale è risolto, almeno dal punto di vista concettuale. Le figure 9.2 e 9.3 mostrano nel modo più "oggettivo" le informazioni estraibili dai dati per quanto riguarda $r$. Se il nostro stato di conoscenza su $r$ fosse stato tale da ammettere tutti i valori nello stesso modo (ovvero $f_\circ(r) = k$) le curve di queste figure, opportunamente normalizzate, ci danno direttamente le distribuzioni di probabilità di $r$. Essenzialmente, quello che vedremo nella parte di inferenza statistica applicata alle incertezze di misura sarà come valutare in modo approssimato forma e parametri delle distribuzioni (valore atteso e deviazione standard). Ad esempio, la curva del fattore di aggiornamento relativo ottenuta da 300 s sembra fortemente gaussiana, anche se la forma esatta della funzione non è affatto banale, essendo infatti:

$$a.r. = 7.652 \times 10^{6327} e^{-30000\, r} (300\, r)^{5348} . \tag{9.13}$$

Assumendo una funzione iniziale uniforme, la funzione finale differisce dalla (9.13) soltanto per un fattore di normalizzazione:

$$f(r \,|\, \text{dati 300 s}) = 1.252 \times 10^{6330} e^{-30000\, r} (300\, r)^{5348} . \tag{9.14}$$

Questa funzione è rappresentata dalla curva continua di figura 9.4. Valore

© G. D'Agostini 2000

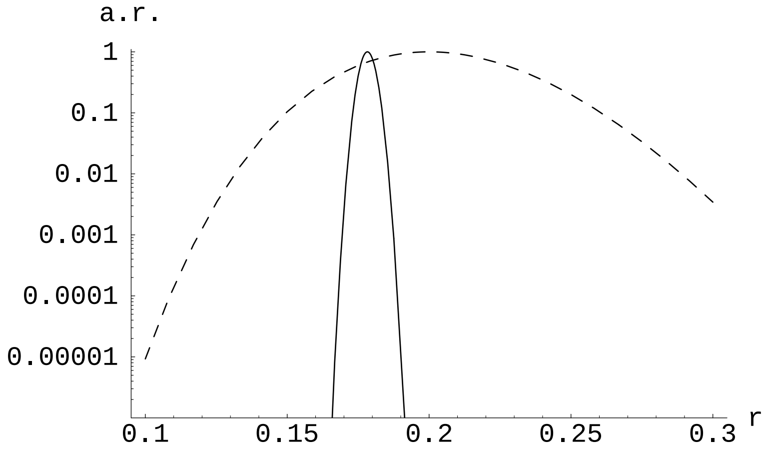


Figura 9.3: Come figura 9.2, ma con fattore di aggiornamento in scala logaritmica: è evidente il diverso potere dei due campioni di dati simulati al fine di discriminare fra i valori più o meno possibili di $r$.

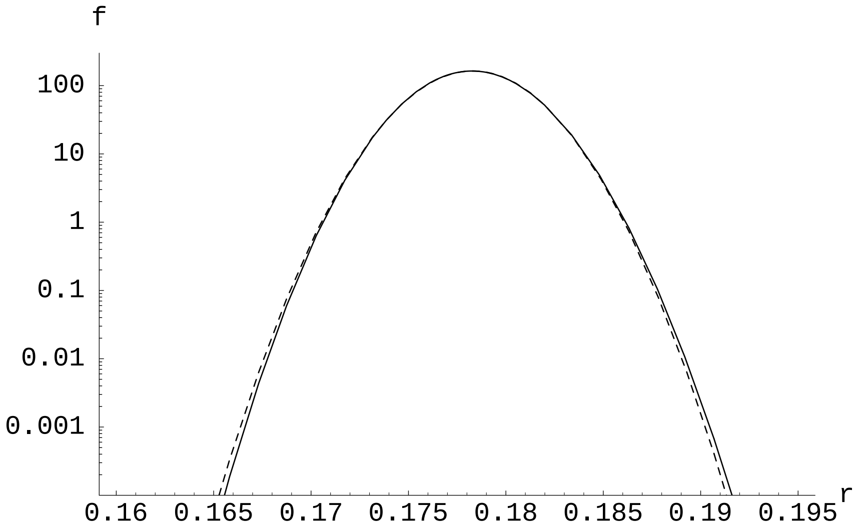


Figura 9.4: Funzione densità di probabilità di $r$ ottenuta dalle misure di 300 s assumendo una distribuzione iniziale uniforme. La linea solida è data dalla (9.13 opportunamente normalizzata. Quella tratteggiata è ottenuta dall'approssimazione gaussiana.

atteso e deviazione standard di $r$ sono:

$$\mathrm{E}[r] = 0.1783 \tag{9.15}$$
$$\sigma(r) = 0.0024 \tag{9.16}$$

Il valore atteso è uguale a quello che si ottiene applicando la (9.12), ovvero esso corrisponde con il valore per il quale i dati sperimentali suggeriscono il massimo aumento di grado di fiducia.

La linea tratteggiata di figura 9.4 mostra una distribuzione gaussiana di valore medio 0.1783 e deviazione standard 0.0024. L'approssimazione è spettacolare su diversi ordini di grandezza. Questa osservazione suggerisce un metodo approssimativo per ricavarsi la deviazione standard di $r$, alla stessa stregua di come ne è stato ricavato il valore atteso in modo approssimativo. Se

$$f(r) \propto e^{-N\,T\,r}\, r^{\sum_i n_i x_i}\,, \sim\propto \exp\left[-\frac{(r-\mu_r)^2}{2\,\sigma_r}\right], \tag{9.17}$$

allora, poiché vale per la gaussiana

$$\frac{\mathrm{d}\ln f}{\mathrm{d}r} = 0 \quad \rightarrow \quad \mu_r \tag{9.18}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 \ln f}{\mathrm{d}^2 r}\right|_{\mu_r} = -\frac{1}{\sigma_r^2}\,, \tag{9.19}$$

possiamo imporre le stesse condizioni sulla $f(r) \propto e^{-N\,T\,r}\, r^{\sum_i n_i x_i}$ per ricavarci $\mu_r$ e $\sigma_r$. Il valore atteso $\mu_r$ corrisponde a $r_M$ di (9.12). Lasciando il calcolo di $sigma(r) = sigma_r$ per esercizio, riportiamo insieme il risultato:

$$\mathrm{E}[r] = \frac{1}{T}\frac{\sum_i n_i x_i}{N} \tag{9.20}$$
$$\sigma(r) = \frac{1}{T}\frac{\sqrt{\sum_i n_i x_i}}{N}\,. \tag{9.21}$$

Applicate al caso delle 100 misure da 300 s, queste formule danno gli stessi risultati ottenuti facendo esplicitamente gli integrali.

Nel caso di una sola misura abbiamo:

$$\mathrm{E}[r] = \frac{x}{T} \tag{9.22}$$
$$\sigma(r) = \frac{\sqrt{x}}{T}\,. \tag{9.23}$$

Questo è un risultato molto interessante. Nelle misure di conteggio non abbiamo bisogno di ripetere le osservazioni per ottenere la deviazione standard associata all'incertezza del risultato. Sono sufficienti il numero di conteggi e l'ipotesi sul processo seguito dai conteggi.

Nel seguito utilizzeremo soltanto il metodo approssimato, che rigiustificheremo mediente il ragionamento del cane e del cacciatore.

© G. D'Agostini 2000

© G. D'Agostini 2000

# Capitolo 10

# Misure dirette con verosimiglianza gaussiana

## 10.1 Risultati delle misure dirette in assenza di errori sistematici

Veniamo ora a come riportare i risultati delle misure dirette, ovvero misure effettuate con uno strumento opportunamente calibrato che fornisce direttamente il valore della grandezza, senza la necessità di effettuare altri conti. Questo è il livello più basso del processo di misura. Eventualmente da queste misure se ne possono ottenere altre, per via indiretta, mediante successive elaborazioni dei risultati di questo stadio.

È noto - lo ripetiamo per fissare le idee e aggiungere delle precisazioni - che ripetendo più volte delle misure della stessa grandezza e nelle *stesse condizioni* si ottengono valori diversi a causa degli inevitabili errori casuali. Le cause di questi errori sono quelle elencate nel paragrafo 8.6.

## 10.2 Condizioni di ripetitibità

Prima di procedere, è importante definire un po' meglio cosa si intende per "stesse condizioni". Esse sono più propriamente denominate *condizioni di ripetitività* e comprendono:

- stesso procedimento di misura;
- stesso osservatore;
- stessi strumenti, utilizzati nelle stesse condizioni;
- stesso luogo;
- ripetizione delle misure in un breve periodo di tempo.

La bontà dell'accordo fra risultati di misure successive effettuate in queste condizioni è indice della *ripetitività* dei risultati.

In caso di totale assenza di errori sistematici, le letture seguono una distribuzione pressoché gaussiana intorno al valore vero. A questa distribuzione viene associata la funzione di verosimiglianza di cui si è parlato precedentemente.

Per quanto riguarda la valutazione a priori, possiamo dire che se l'esperimento è ben pianificato (scelta di strumenti, procedure, etc.), l'entità degli errori di misura è molto minore dell'incertezza con la quale è possibile conoscere il valore del misurando prima dell'operazione di misura (ad esempio, dovendo misurare l'esatta lunghezza di una barra di circa un metro, è difficile trovare delle persone per le quali l'intervallo di "accettanza del risultato" sia inferiore di una decina di centimetri, "infinitamente maggiore" di quello dovuto ai possibili errori di un normale strumento di misura[1]). Quindi, in queste circostanze, possiamo utilizzare l'inversione di probabilità intuitiva del cane e del cacciatore, bypassando l'uso esplicito del teorema di Bayes[2].

Come primo passo, assumiamo di conoscere la deviazione standard che descrive l'entità delle fluttuazioni. Chiamiamola $\sigma_r$, ove $r$ sta a ricordare "ripetitività", o anche *"random"*, (*casuale*). Si noti che essa contiene l'eventuale contributo delle fluttuazioni di stima di lettura degli strumenti analogici. Altra assunzione che facciamo è che $\sigma_r$ non dipenda dal valore di $\mu$ nell'intervallo di interesse (a volte succede invece che una procedura di misura abbia una precisione dipendente dal valore del misurando).

Consideriamo prima il caso semplice di una singola misura e quindi quello di molte misure ripetute.

## 10.3 Singola osservazione con $\sigma_r$ nota

Si osserva $X = x$. Siccome si crede che i possibili valori dell'osservabile abbiano una distribuzione di probabilità gaussiana con

$$\sigma(X) = \sigma_r$$

intorno a $\mu$, dall'inversione di probabilità si ha che i possibili valori di $\mu$ hanno una analoga distribuzione di probabilità intorno a $x$ con

$$\sigma(\mu) = \sigma(X) = \sigma_r\,.$$

[1]Le prior non devono mai sparire completamente dalla mente, ma devono servire a vigilare attentamente il flusso dei dati e intervenire al minimo sospetto che qualcosa non vada!

[2]Una prior uniforme e una verosimiglianza gaussiana producono, in virtù della (9.5), il seguente risultato:

$$\begin{aligned} f(\mu\,|\,x) &\propto f(x\,|\,\mu) \propto \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma_r^2}\right] \\ &\propto \exp\left[-\frac{(\mu-x)^2}{2\,\sigma_r^2}\right], \end{aligned}$$

in cui nell'ultimo passaggio sono stati invertiti $\mu$ e $x$, al fine di ricordare che la variabile della nuova funzione è $\mu$ e non più $x$ (questo diventa il parametro che dà il centro della distribuzione). Ne segue che il valore vero è distribuito intorno al valore osservato secondo una gaussiana avente la stessa deviazione standard della verosimiglianza:

$$f(\mu\,|\,x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\sigma_r}\exp\left[-\frac{(\mu-x)^2}{2\,\sigma_r^2}\right].$$

Espresso in modo sintetico:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_R) \xrightarrow[\text{prior uniforme}]{} \mu \sim \mathcal{N}(x, \sigma_R) \qquad (10.1)$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \mu &= x \pm \sigma_r && \text{al } \approx 68\,\% \text{ di probabilità} \\ &= x \pm 2\,\sigma_r && \text{al } \approx 95\,\% \text{ di probabilità} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Nel seguito considereremo come standard l'incertezza data ad una deviazione standard, essa è chiamata *incertezza standard* (vedi paragrafo 11.7).

Concludiamo questo paragrafo invitando a riflettere al significato probabilistico di espressioni del tipo $\mu = x \pm \sigma_r$ sul quale è già stato detto precedentemente e a diffitare da interpretazioni del tipo "se io ripetessi la misura un grande numero di volte, allora nel 68,3 % dei casi otterrei risultati compresi nell'intervallo $x \pm \sigma_r$": oltre a forzature interpretative si commette un errore numerico di $\sqrt{2}$: come mai?

## 10.4 $n$ osservazioni indipendenti con $\sigma_r$ nota

Cominciamo con due osservazioni, ad esempio $x_1$ e $x_2$. Innanzitutto è chiaro che, alla luce di ciascuna delle due osservazioni si avrebbe:

$$\begin{aligned} \mu|_{x_1} &= x_1 \pm \sigma_r \\ \mu|_{x_2} &= x_2 \pm \sigma_r\,, \end{aligned}$$

ove $\mu|_{x_i}$ sta ad indicare "$\mu$ subordinato all'osservazione di $x_i$" (si è preferito scrivere così , anziché $\mu_1$ e $\mu_2$, per ricordare che stiamo parlando della stessa grandezza fisica). Cosa possiamo dire ora su $\mu$ alla luce di $x_1$ e $x_2$?

$$\mu|_{x_1 \cap x_2} = ?$$

Dal punto di vista generale si possono percorrere tre strade diverse.

1. Si può considerare il risultato $f(\mu \,|\, x_1)$ come prior antecedente l'osservazione di $x_2$ e inserirla nella formula dell'inferenza bayesiana. In modo simmetrico si può rovesciare l'ordine di osservazione: prima $x_2$ e poi $x_1$. Se la procedura è corretta le conclusioni finali non devono dipendere dall'ordine.

2. In alternativa, si può considerare la verosimiglianza di osservare, dato un valore di $\mu$, la coppia $\{x_1, x_2\}$ e applicare il teorema di Bayes all'inversione:
$$f(x_1, x_2 \,|\, \mu) \to f(\mu \,|\, x_1, x_2)\,.$$

3. C'è infine un terzo modo di procedere, euristico, in quanto assume che la soluzione di prova sia quella buona e fornisce soltanto il valore dell'incertezza. Per semplicità illustriamo questo (per gli altri c'è poco da spiegare, si tratta solo di fare i conti...).

© G. D'Agostini 2000

Assumiamo, ragionevolmente, che il valore centrale intorno al quale è distribuito $\mu|\, x_1 \cap x_2$ sia la media aritmetica:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}\,.$$

Subordinatamente ad un certo valore di $\mu$ anche la media aritmetica $\overline{x}$ è una variabile casuale, in quanto è funzione di variabili casuali. Anch'essa, per simmetria, ha una distribuzione di probabilità intorno a $\mu$. In questo caso il processo di inferenza è del tipo[3]

$$f(\overline{x}\,|\,\mu) \to f(\mu\,|\,\overline{x})\,.$$

La differenza rispetto al caso precedente è nella diversa deviazione standard di $\overline{x}$ intorno a $\mu$. Anche se per arrivare all'esatto fattore di riduzione si rimanda ad un testo di calcolo delle probabilità (vedi anche Appendice), il risultato può essere giusticato dicendo che, *essendo $x_1$ e $x_2$ indipendenti, le fluttuazioni della media tendono a compensarsi*. Quantitativamente si ottiene che

$$\sigma(\overline{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma_r}{\sqrt{2}}\,.$$

Quindi, utilizzando ancora una volta il ragionamento di inversione di probabilità intuitivo, possiamo dire che

$$\sigma(\mu) = \sigma(\overline{x}) = \frac{\sigma_r}{\sqrt{2}}\,.$$

In effetti si può dimostrare che tutte e tre le strade conducono al medesimo risultato. Nel caso generale di $n$ osservazioni indipendenti, si ha:

$$\sigma(\mu) = \frac{\sigma_r}{\sqrt{n}}\,,$$

da cui:

$$\mu = \overline{x} \pm \frac{\sigma_r}{\sqrt{n}}\,. \tag{10.2}$$

Quindi, la soluzione giusta al quesito 6 del paragrafo A.1 è quella con "$1/\sqrt{n}$". Ciò nonostante, è ragionevole preoccuparsi di un'incertezza che tende a zero all'aumentare di $n$. Questo induce molti a diffidare di questa formula e ignorare il $\sqrt{n}$. Ciò è dovuto alla mancanza di una visione globale del problema. La formula (10.2) è assolutamente corretta, ma non tiene conto di altre possibili cause di incertezza. Queste vanno identificate e il loro contributo va combinato insieme a $\sigma/\sqrt{n}$ in maniera appropriata (vedi paragrafo11.2).

[3] Il fatto che il solo valore della media aritmetica sia in grado di produrre una inferenza statistica della stessa qualità dei singoli valori osservati è legato al concetto statistico di "sufficienza".

© G. D'Agostini 2000

## 10.5 Caso di $\sigma_r$ ignota

Il caso precedente è indubbiamente quello più semplice. Quando invece $\sigma_r$ è ignota, essa va stimata dagli stessi dati, o da altre informazioni (esperimenti analoghi, esperienza di colleghi, etc.). Nel caso di assoluta ignoranza (ma è difficile trovarsi in tale stato!) è assolutamente impossibile effettuare stime dell'incertezza e quindi presentare risultati in modo scientificamente corretto. Un caso di assoluta ignoranza potrebbe essere quello, assurdo, di tentare di stimare l'incertezza partendo da un numero locato in una memoria di un computer, scritto con un grandissimo numero di cifre in quanto risultato di una operazione matematica, senza sapere a quale esperimento si riferisca, con quale strumentazione è stato ottenuto e così via.

Consideriamo ora due casi tipici che capitano in laboratorio.

### 10.5.1 Misure ripetute della stessa grandezza fisica

Questo caso si riconduce a quello di $\sigma$ nota quando il numero di misure è abbastanza grande:

- il valore vero è in prossimità della media aritmetica, con una incertezza che decresce come $1/\sqrt{n}$;
- la deviazione standard dell'errore statistico ("valore osservato meno valore vero") può essere stimato dalla deviazione standard degli scarti dei singoli valori osservati rispetto alla media[4]:

  $$\sigma_r \approx \sigma_n(\Delta)\,,$$

  con $\Delta_i = x_i = \overline{x}$.

Quando invece $n$ è piccolo (al di sotto della decina, tipicamente), nascono altre complicazioni, in quanto:

- innanzitutto $\sigma(\Delta)$ non è una buona stima di $\sigma_r$ (si pensi al caso limite di $n = 1$);
- in secondo luogo, la verosimiglianza dipende dal parametro ignoto $\sigma_r$ sul quale c'è stato di incertezza: la banale inversione di probabilità tipo cane-cacciatore non è più ovvia.

Come si può intuire, il problema diventa complicato. La soluzione convenzionale della prassi statistica consiste in

1. aumentare la deviazione standard stimata per tenere conto che la media è legata ("vincolata") ai valori stessi e che quindi la deviazione standard tende ad essere sottostimata rispetto a quanto si otterrebbe disponendo di

[4] Si ricorda che, ai fini del calcolo pratico, essa è valutata come:

$$\sigma_n^2(\Delta) = \sigma_n^2(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2\,,$$

ove $\sigma_n^2$ sta ad indicare, secondo la convenzione delle calcolatrici tascabili, che la varianza è calcolata come media dei quadrati degli scarti.

© G. D'Agostini 2000

un campione più numeroso (si pensi al caso limite $n = 1$); si preferisce allora usare $\sigma_{n-1}$

$$\sigma_n \longrightarrow \sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_n ;$$

2. cambiare il tipo di distribuzione finale: dalla gaussiana alla cosiddetta $t$ di Student.

In realtà, anche se questi metodi vanno in qualche modo "nella direzione" giusta, bisogna fare attenzione a non prenderli troppo alla lettera. Ad esempio, se si osservano due valori che differiscono di 0.3 mm e si applica ciecamente questo metodo ne risulta un intervallo di incertezza di quasi 10 cm qualora si richiedesse un "livello di confidenza" del 99.9 %. Qualsiasi meccanico troverebbe ridicola questa conclusione. Molto spesso, quando $n$ è veramente dell'ordine dell'unità, può essere più sensato quello che si sapeva su $\sigma_r$ prima della misura di quanto si possa ricavare dai dati stessi (su questo punto ritorneremo fra breve). Quando invece il problema è veramente critico è essenziale ripetere più volte le misure. Quando infine $n$ è già dell'"ordine di 10" (ma anche 5-6 può andare abbastanza bene), l'inversione gaussiana diventa abbastanza ragionevole.

### 10.5.2 Singole misure di grandezze fisiche variabili (grafici)

Quando si devono fare molte misure di una grandezza in funzione di un'altra per poi riportare su un grafico l'andamento, può diventare veramente lungo e noioso ripetere molte volte le misure per ciascun punto delle ascisse. In taluni casi non è nemmeno pensabile (si immagini ad esempio la misura di una grandezza rapidamente variabile con il tempo). Questo è il caso tipico in cui non ha senso riportare delle barre di incertezza sul grafico. Al contrario, è lo stesso grafico che permette di stimare le incertezze (con alcune ipotesi e previa attenta ispezione visuale). Se, ad esempio, le incertezze sulle ascisse sono trascurabili[5], e quelle sulle ordinate sono (="si pensa che siano") costanti (o modellizzabili in qualche modo semplice) è possibile valutare $\sigma_r$ delle ordinate (o "$\sigma_{y_r}$", per chi preferisce ricordare nel simbolo che si tratta di ordinate) dagli scarti fra il singolo valore osservato e l'"andamento medio" dei punti (leggi: la curva "motivata fisicamente" che approssima meglio i dati sperimentali). Questa procedura si chiama *metodo dei residui* (vedi figura A.3 e paragrafo 10.5.2).

Da quanto detto in questo paragrafo si capisce la critica, avanzata nel paragrafo A.2.4, all'obbligo di riportare immediatamente i punti sperimentali con le barre di incertezza. Nella maggior parte dei casi di laboratorio questa regola rigida è semplicemente assurda, in quanto sono i grafici stessi che devono servire a stimare le incertezze.

[5] In realtà questo è una condizione non necessaria, legata ad un modo semplicistico di vedere le cose: anche se ci sono incertezze sulle ascisse, queste possono essere riflesse su quelle delle ordinate e la soluzione pratica non cambia.

### 10.5.3 Bisogna sempre ripetere le misure? Rarità delle situazioni in cui $\sigma_r$ sia completamente ignota

I casi precedentemente trattati potrebbero indurre a credere che, ogni volta che si deve determinare il valore di una certa grandezza fisica, si debba necessariamente ripetere la misura tante volte, o avere effettuato nel passato una lunga serie di misure di quel misurando in quelle condizioni, o almeno aver effettuato misure in condizioni prossime a quelle di interesse. In realtà, questo non è assolutamente necessario, come ben sanno anche meccanici, falegnami e muratori. Ognuno di loro, nel suo ambito e con i propri strumenti, è perfettamente cosciente di quanto credere al valore misurato. In effetti è veramente raro il caso in cui un professionista faccia delle misure senza avere nessuna idea dell'errore (o dell'errore percentuale) che può commettere e, quindi, della corrispondente incertezza sul valore della grandezza di interesse. L'esperienza acquisita su misure analoghe permette di valutare $\sigma_r$ anche nei casi in cui si sia eseguita una sola misura. Questo valore può essere quindi utilizzato nella stima delle incertezze, come è stato sempre fatto, più o meno coscientemente, dagli sperimentatori e come raccomandato nella *Guida* ISO (vedi paragrafo 11.8).

Terminiamo con un'ultima raccomandazione, dedicata a tutti coloro che affermano, a ragione, che nella loro attività di ricerca "è impossibile il calcolo degli errori". Sono perfettamente d'accordo con loro se si riferiscono al modello standard stereotipato di deviazione standard, propagazione, etc., ovvero a schematizzare il processo inferenziale nel paradigma prior-verosimiglianza-posterior. In questi casi non banali, l'*extrema ratio* è una valutazione puramente soggettiva, alla luce della regola normativa della coerenza, eseguita rispondendo a domande del tipo: "quanto credo - io - nel numero che ho ottenuto?"; "quanto è ampio l'intervallo di valori tale da essere in stato di indifferenza rispetto all'eventualità che il valore vero vi sia compreso o no?" (Questo definisce un intervallo al 50 % di probabilità.). Ci si rende conto allora che in realtà, molto spesso, si sa molto di più di quello che si pensava. Questo è il motivo per cui anche quelli che "non calcolano gli errori" poi, in pratica, quando sono messi alle strette con queste domande, limitano le cifre con cui forniscono il risultato, o si esprimono sull'eventuale accordo con valori teorici o con altri risultati, sebbene i numeri sono diversi fra loro in senso matematico. Questo ultimo discorso verrà formalizzato meglio nel paragrafo 11.8, quando si discuterà la valutazione delle cosiddette incertezze di tipo B.

## 10.6 ❄ Uso della $t$ di Student

## 10.7 Presentazione del risultato - cifre significative

Riprendiamo ora il discorso sul numero di cifre con il quale presentare il risultato della misura, iniziato nel paragrafo 3.4, ovvero prima di essere in grado di stimare quantitativamente l'incertezza di misura. È chiaro ora come, al termine di un lavoro di laboratorio e di analisi dei dati sperimentali sia importante presentare il risultato con la sua incertezza e con le opportune unità di misura della grandezza fisica. L'uso più comune è quello di riportare il risultato nella

© G. D'Agostini 2000

forma:

$$\mu = (\widehat{\mu} \pm u)\,[G] \tag{10.3}$$

dove $[G]$, ricordiamo, rappresenta l'unità di misura, mentre $\hat{\mu}$ e $u$ stanno, rispettivamente, per "stimatore" di $\mu$ e incertezza ($u$ dovrebbe ricordare *uncertainty*. In questo testo utilizziamo, a meno che non sia indicato diversamente, come stimatore la previsione o valore atteso $\mathrm{E}(\mu)$ e come incertezza l'incertezza standard di previsione $\sigma(\mu)$.

Sorge a questo punto il problema del numero di cifre con il quale riportare il risultato. L'uso corrente di calcolatrici tascabili che fanno tranquillamente operazioni a 8 o 10 cifre indurrebbe a scrivere il risultato con tutte le cifre che il calcolatore dà, con lo spirito che è meglio abbondare che scarseggiare. Questo non è vero. Risultati con troppe cifre sono difficilmente leggibili e gran parte delle cifre non danno nessuna informazione reale su quello a cui siamo interessati. È utile invece cambiare punto di vista e formulare il problema in termine del *numero minimo di cifre per fornire il risultato con la precisione con la quale è stato determinato*. Supponiamo di aver aver misurato una lunghezza e di ottenuto dai conti

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= 5.348882341 \\ u &= 5.909160536 \times 10^{-2}\,. \end{aligned}$$

Risultati del tipo

$$\begin{aligned} \mu &= 5.348882341 \pm 5.909160536 \times 10^{-2}\,\mathrm{cm} \\ &= 5.348882341 \pm 0.05909160536\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

sono assolutamente ridicoli. Essendo già - molto ! - incerti sulla seconda cifra dopo la virgola del risultato, non ha molto senso scrivere tutte le altre. Similmente, non è di nessuno interesse sapere se l'incertezza è di $0.05909160536$ o $0.05909160537\,\mathrm{cm}$, e nemmeno se è $0.0590$ invece di $0.0591\,\mathrm{cm}$. Quello che è importante è sapere che circa $0.06\,\mathrm{cm}$ piuttosto che 0.07, 0.05. Ma questo implica che chi utilizzarà successivamente queste informazioni sarà "incerto sull'incertezza" di circa $\pm 0.5$ su 6, ovvero dell'ordine del $10\,\%$, a causa dell'arrotondamento. Dal punto di vista pratico, nel senso di percezione dell'incertezza, tale incertezza aggiuntiva è irrilevante. Inoltre, tenendo conto anche di possibili effetti sistematici, il cui contributo all'incertezza è sempre di difficile valutazione, è difficile credere veramente ad una stima dell'incertezza al meglio dell'ordine del $10\,\%$. D'altra parte è possibile pensare a casi sofisticati in cui un eccessivo arrotondamento, pur non provocando nessun deterioramento della percezione dell'incertezza, può influenzare elaborazioni successive[6] Comunque, volendo dare delle raccomandazioni, diciamo che, pur non essendoci una regola generale e quindi di far uso del buon senso, ii danno di norma *una o due cifre significative per l'incertezza*. Per quanto riguarda invece lo stimatore, la regola è molto più rigida: *si dà un numero di cifre significative fino ad arrivare all'ordine di grandezza della cifra dell'incertezza meno significativa*. Quindi il risultato del nostro esempio può essere presentato nei seguenti

[6]Un caso tipico è quello di risultati correlati. In alcuni casi anche la terza o la quarta cifra dell'incertezza può diventare cruciale.

© G. D'Agostini 2000

modi, entrambi accettabili:

$$l = (5.35 \pm 0.06)\,\mathrm{cm} \quad (10.4)$$
$$l = (5.349 \pm 0.059)\,\mathrm{cm}. \quad (10.5)$$

Il primo risultato è espresso con una cifra significativa per l'incertezza e tre per il valore, il secondo ne ha rispettivamente due e quattro. Si noti comunque come la scrittura che trasmette in modo più immediato la qualità del risultato è la prima.

Ci sono casi in cui si ha l'interesse, invece di dare il risultato come valore medio più o meno l'incertezza, di fornire gli estremi dell'intervallo dato dall'incertezza. Anche in questo caso è preferibile valutare le cifre significative per l'incertezza e per lo stimatore e successivamente effettuare le somme e le diferenze. Nel caso del nostro esempio i limiti verrebbero $5.29 < l < 5.41$cm o $5.290 < l < 5.408$cm.

Quando l'incertezza è sulle cifre a sinistra della virgola servono degli "zeri a destra" di appoggio che però non hanno in questo caso il significato di cifre significative, come ad esempio:

$$d = (13200 \pm 500)\,\mathrm{m}, \quad (10.6)$$

ovvero $d = (13.2 \pm 0.5)\,\mathrm{k}m$. È ovvio che nella (10.6) non è chiaro se l'incertezza sia $500\,\mathrm{m}$ o $50\,\mathrm{m}$, anche se in mancanza di ulteriori informazioni il lettore preferisce essere prudente e utilizzare l'interpretazione più conservativa di $\pm 500\,\mathrm{m}$. Un modo per ovviare a questi problemi, evitando al tempo stesso numeri troppo lunghi, è quello di riportare i risultati in notazione scientifica con una mantissa moltiplicata una potenza di 10, come ad esempio $(1.32 \pm 0.05) \cdot 10^4\,\mathrm{m}$. Come si vede questa notazione non dà luogo ad ambiguità, ma rischia di non essere memorizzabile dal lettore se la potenza di 10 non ha un significato immediato. In questo caso, ad esempio, $(13.2 \pm 0.5) \cdot 10^3\,\mathrm{m}$, ovvero $(13.2 \pm 0.5)\,\mathrm{km}$, costituisce la presentazione più intellegibile e meno ambigua.

Ci sono altri modi di presentare il risultato che si incontrano in letteratura e che sono validi fintanto ché cifre significative e precisione della misura sono fra di loro coerenti.

- $0.529177249(24) \times 10^{-10}$ cm: questo è il modo raccomandato dalal *Guida* ISO e l'esempio mostra il valore del raggio di Bohr che compare nelle tabelle delle costanti fisiche[7]. Fra parentesi compare la deviazione standard sulle ultime due cifre significative. Il risultato è quindi equivalente a $(0.529177249 \pm 0.000000024) \times 10^{-10}$ cm ma decisamente più intellegibile.
- $0.529177249 \times 10^{-10}$ cm$\pm 0.045$ ppm: è il modo con cui si potrebbe dare il risultato precedente fornendo l'incertezza relativa in parti per milione (ppm);
- $\lambda = 220.0 \cdot (1 \pm 0.02)\,\mathrm{WK^{-1}m^{-1}}$: indica un risultato al $2\,\%$, equivalente a $(220.0 \pm 4.4)\mathrm{WK^{-1}m^{-1}}$;

[7]Particle Data Group, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 1173.

© G. D'Agostini 2000

- $180.2\,\Omega\pm1.5\,\%$: è un altro modo per fornire un risultato con l'incertezza percentuale, equivalente a $(180.2 \pm 2.7)\,\Omega$;
- $157\,$s: questo risultato dato senza incertezza va interpretato a seconda del contesto. Per alcuni significa che tutte le cifre sono sicure e l'incertezza è su quelle successive; per altri che il valore vero è compreso con sicurezza fra 156.5 e 157.5; per altri ancora che l'incertezza è dell'*ordine di grandezza* dell'ultima cifra significativa. È chiaro quindi che o un dato del genere non è determinante ai fini dell'analisi oppure che si devono avere altre informazioni per il suo corretto utilizzo;
- $12.546_3$ g: le cifre grandi rappresentano quella sicura mentre quella piccola è quella sulla quale lo sperimentatore si assume minore responsabilità. Valgono più o meno le stesse osservazioni del caso precedente.

Abbiamo visto con quante cifre presentare il risultato, ma con quante cifre bisogna registrare i dati di laboratorio? Se si conosce *a priori* l'incertezza di misura si utilizzano le regole appena viste. Altrimenti bisogna regolarsi cercando di non perdere precisione ma anche di non sprecare tempo e spazio a portarsi dietro cifre inutili, basandosi anche sulla precisione che si vorrebbe raggiungere sul risultato finale. Molto spesso, se capita di effettuare più misure, all'inizio ci cerca di registrare tutte le cifre, ma dopo un po' ci si rende conto delle cifre troppo ballerine che, come dice il nome, non sono assolutamente significative.

## 10.8 Misure di conteggio in approssimazione normale

Una classe interessante di misure è rappresentata dai conteggi. Diversi esempi sono stati analizzati in dettaglio nei capitoli precedenti, prendendo spunto dalle esperienze simulate del contatore e del pallinometro. A differenza dei casi trattati finora, le verosimiglianze sono rispettivamente di tipo poissoniano e binomiale. Si rimanda ad altri testi per il problema generale (ad esempio dispense relative a inferenza statistica). Trattiamo qui soltanto il caso semplificato in cui le verosimiglianze sono approssimativamente normali.

### 10.8.1 Valutazione parametro della Poissoniana e dell'intensità di un processo di Poisson

Consideriamo l'esperienza simulata del contatore e concentriamoci sulla prima misura da 300 s, la quale ha dato 55 conteggi (vedi paragrafo 1.1 e tabelle 1.1) Vediamo come sia possibile, da questa sola informazione, ricavarsi non solo l'intensità del processo di Poisson (questo è comunque possibile, come l'intuizione suggerisce, dal numero di conteggi diviso il tempo di misura) ma anche l'incertezza su tale valore. Abbiamo già visto come questo può essere fatto in maniera rigorosa usando lo schema di inferenza bayesiana (vedi paragrafo 9.8). Possiamo risultare analoghi facendo il seguente ragionamento:

- dato il tipo di fenomeno fisico, lo possiamo modellizzare con un fenomeno di Poisson di intensità $r$; fissando il tempo di misura, i possibili conteggi che saranno osservati sono descritti da una distribuzione

© G. D'Agostini 2000

poissoniana di parametro $\lambda$ ignota:

$$X \sim \mathcal{P}_\lambda\,;$$

- essendo il valore misurato $X = 55$ grande, ci aspettiamo che, molto probabilmente anche $\lambda$ sia grande, ove "grande" indica che l'approssimazione della poissoniana con una normale è abbastanza buona, ovvero:

$$X \sim \mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})\,;$$

- assumendo uno stato di conoscenza a priori su $\lambda$ abbastanza vago possiamo utilizzare l'inversisone di probabilità del tipo "cane-cacciatore":

$$\lambda \sim \mathcal{N}(x, \sqrt{x})\,,$$

  ottenendo quindi

$$\begin{aligned} \lambda(300\,\mathrm{s}) &= 55 \pm 7\,\text{conteggi} \\ r &= 0.183 \pm 0.025\,\text{conteggi/s}\,. \end{aligned}$$

Confrontando questo risultato con quello delle figure 9.2 e 9.3, vediamo come questo risultato sia compatibile con quelli già ottenuti e di qualità confrontabile a quello ottenuto dal complesso delle misure da 3 s, ma inferiore a quello ottenuto da tutte le misure da 300 s.

Vediamo ora come ottenere un risultato che tenga conto di tutte le misure effettuate ad un certo tempo fissato.

- Le 100 misure da 300 s equivalgono ad una sola misura da 30000, ovvero:

$$\begin{aligned} \lambda(30000\,\mathrm{s}) &= 5348 \pm 73 \\ r &= 0.1783 \pm 0.0024\,\text{conteggi/s}\,, \end{aligned}$$

  da cui

$$\lambda(300\,\mathrm{s}) = 53.48 \pm 0.73\,.$$

- Possiamo generalizzare questo caso al caso generale, pensando alle $n$

© G. D'Agostini 2000

| $T$ (s) | $\lambda$ (conteggi) | $r$ (conteggi/s) |
|---|---|---|
| 3 | $0.60 \pm 0.08$ | $0.200 \pm 0.026$ |
| 6 | $1.02 \pm 0.10$ | $0.170 \pm 0.016$ |
| 12 | $2.19 \pm 0.15$ | $0.183 \pm 0.012$ |
| 30 | $5.16 \pm 0.23$ | $0.172 \pm 0.008$ |
| 100 | $17.81 \pm 0.42$ | $0.1781 \pm 0.0042$ |
| 300 | $53.48 \pm 0.73$ | $0.1783 \pm 0.0024$ |

Tabella 10.1: Risultati si $\lambda$ e su $r$ ottenuti dai dati simulati del contatore.

misure di durate $T$, scrivendo:

$$\begin{aligned}
X &\sim \mathcal{P}_{\lambda(T)} \\
\sum_{i=1}^{n} X_i &\sim \mathcal{P}_{n\,\lambda(T)} = \mathcal{P}_{\lambda(n\,T)} \\
\rightarrow &\sim \mathcal{N}(\lambda(n\,T), \sqrt{\lambda(n\,T)}) \\
& \quad \text{se} \sum_{i=1}^{n} > \mathcal{O}(10);\ \text{allora:} \\
\lambda(n\,T) &\sim \mathcal{N}(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}) \\
\lambda(T) &\sim \mathcal{N}(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{n}) \\
&\sim \mathcal{N}(\overline{x}, \frac{\sqrt{\overline{x}}}{\sqrt{n}}) \\
r &\sim \mathcal{N}(\frac{\overline{x}}{T}, \frac{\sqrt{\overline{x}}}{\sqrt{n}\cdot T})\,.
\end{aligned}$$

Si noti inoltre come, quando si hanno molte misure, non è richiesta l'ipotesi di normalità di ciascuno dei valori osservabili, essendo sufficiente che essa sia soddisfatta dalla variabile "somma delle osservazioni". Pertanto queste formule sono applicabile anche all'insieme delle misure da 3 s. La tabella 10.1 fornisce i risultati che si ottengono per $\lambda$ e per $r$ da ciascun gruppo. Si noti come $\lambda$ aumenti con il tempo di misura, mentre $r$ è circa indipendente entro le incertezze. Inoltre, come era da aspettarsi, la qualità delle misure, quantificata dalla precisione, aumenta con il tempo di misura. Un'altra osservazione importante è che l'incertezza sia stata ricavata soltanto dalle medie, senza tener conto delle deviazioni standard calcolate in ciascun gruppetto.

© G. D'Agostini 2000

### 10.8.2 Valutazione di $p$ di una distribuzione binomiale

Ci possiamo comportare in un modo analogo nell'effettuare inferenze su parametro $p$ di una binomiale. Consideriamo in questo caso l'esperienza simulata del pallinometro a due file di chiodi, in particolare il primo risultato ottenuto nel bin 0 lanciando 1000 palline (vedi tabella 1.3). Abbiamo ottenuto 254 palline. Assumiamo di non conoscere i dettagli costruttivi del pallinometro e che questa sia la sola informazione in nostro possesso. Cosa possiamo dire sulla probabilità che in un prossimo lancio fatto nelle stesse condizioni la pallina cada di nuovo nel bin 0? Intuitivamente diciamo il 25.4 %, ma anche altri (infiniti) valori sono compatibili con i dati sperimentali. Diciamo che, in ogni caso, sembra fortemente ragionevole di essere in presenza di un processo descritto da una distribuzione binomiale avente $n = 1000$ e $p \approx 0.25$, ovvero $\mathrm{E}(X) \approx 250$, valore per il quale la distribuzione è circa normale. Abbiamo quindi, sulla traccia del caso precedente:

$$
\begin{aligned}
X &\sim \mathcal{B}_{n\,p} \rightarrow \mathcal{N}(n\,p, \sqrt{n\,p\,(1-p)}) \\
(n\,p) &\sim \mathcal{N}(x, \sqrt{x\,(1-x/n)}) \\
p &\sim \mathcal{N}\left(\frac{x}{n}, \sqrt{\frac{x}{n}\,(1-\frac{x}{n})\,\frac{1}{n}}\right) \\
&\sim \mathcal{N}\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p}}{n}}\right) ,
\end{aligned}
$$

ove, per comodità, abbiamo indicato con $\hat{p}$ lo stimatore di $p$, dato da $x/n$. Nel caso che stiamo esaminando abbiamo:

$$p = 0.254 \pm 0.014 \,,$$

compatibile con il valore di $1/4$ valutato da argomenti di simmetria. Chiaramente, a questa compatibilità non va dato altro significato che quello che discende dalle leggi della probailità, ed in particolare dal teorema di Bernoulli, ovvero che sarebbe stato abbastanza improbabile osservare un valore di frequenza relativa molto distante da quello di probabilità. Nel caso in cui noi fossimo stati veramente in stato di ignoranza sul meccanismo cui cui le palline scendono saremmo stati disposti ad accettare, come valore di probabilità, un ampio spettro di valori (al limite, allo stesso modo tutti quelli fra 0 e 1). Ricordiamo come sia questo stato di indifferenza rispetto a $p$ ad autorizzarci ad effettuare le inversioni di probabilità del tipo cane-cacciatore, che portano alle formule trovate.

© G. D'Agostini 2000

## 10.9 Combinazione di più risultati sullo stesso misurando

Supponiamo di avere eseguito due determinazioni indipendenti del valore dello stesso misurando:

$$\mu^{(1)} = 20.5 \pm 2.5 \qquad (10.7)$$

$$\mu^{(2)} = 23.7 \pm 1.5\,, \qquad (10.8)$$

ove si fatto uso della notazione $\mu^{i)}$ (invece di $\mu|_{x_i}$ incontrata nel paragrafo 10.4) in quanto questi risultati possono essere basati non soltanto su una misura, ma anche su molte misure. Cosa possiamo dire su $\mu$ in base a queste due valutazione? Si potrebbe pensare, ingenuamente, che, siccome la prima dice che $18.0 \leq \mu \leq 23.0$, e la seconda $22.2 \leq \mu \leq 25.2$, allora $22.2 \leq \mu \leq 23.0$. O forse $18.0 \leq \mu \leq 25.2$? E che significato avrebbero queste espressioni in termini probabilistici? Cerchiamo di affrontare il problema in maniera rigorosa, utilizzando i principi dell'inferenza bayesiana, pur limitandoci all'approssimazione gaussiana e a prior uniformi.

Ripetendo il ragionamento effettato al punto 1 del paragrafo 10.4, si può pensare che le due misure siano fatte in successione temporale (l'ordine non ha importanza). Questa volta entriamo però un po' più in dettaglio. Per generalizzare l'esempio numerico, indichiamo con $\widehat{\mu}_i$ il possibile valore di previsione di $\mu$ che può risultare dopo l'esperimento $i$-mo. Chiaramente, prima di fare l'esperimento non possiamo sapere che valore di $\widehat{\mu}$ si otterrà. Questo è vero anche se ipotizziamo che $\mu$ abbia un valore ben determinato. Quindi esso può essere considerato un numero aleatorio con distribuzione densità di probabilità $f(\hat{\mu}\,|\,\mu)$. Poichè i risultati espressi dalle (10.7) e (10.8) hanno il significato di distribuzioni normali di $\mu$ intorno a $\widehat{\mu}$, possiamo considerarli equivalenti a quanto si otterrebbe considerando una prior uniforme su $\mu$ e una verosimiglianza $f(\widehat{\mu}\,|\,\mu)$ normale. Si tratta, essenzialmente, del ragionamento opposto di quello del cane-cacciatore usato nelle inversioni di probabilità. Quindi, indicando con $\sigma_i$ l'incertezza su $\mu$ derivante dall'$i$-ma misura, i risultati (10.7) e (10.8) equivalenti a quelli che si sarebbero ottenuti da una verosimiglianza del tipo

$$\widehat{\mu}_i \sim \mathcal{N}(\mu_i\,|\,\sigma_i)\,,$$

anche se, a rigore, $\widehat{\mu}_i$ non è una quantità osservata nel senso che abbiamo descritto finora.[8]

Quindi, l'apprendimento sul valore $\mu$ è equivalente alla seguente catena di aggiornamento:

$$\begin{aligned} f_\circ(\mu) &\Rightarrow f_{(1)}(\mu\,|\,\widehat{\mu}_1) \propto f(\widehat{\mu}_1\,|\,\mu)\cdot f_\circ(\mu) \\ f'_\circ(\mu) = f_{(1)}(\mu) &\Rightarrow f_{(1+2)}(\mu\,|\,\widehat{\mu}_1), \widehat{\mu}_1)) \propto f(\widehat{\mu}_2\,|\,\mu, \widehat{\mu}_1)\cdot f(\widehat{\mu}_1\,|\,\mu)\cdot f_\circ(\mu)\,. \end{aligned}$$

[8] Per chiarire il concetto, $\widehat{\mu}$ può essere stato ottenuto come media aritmetica, come ad esempio mostrato nella (10.2), ovvero $\widehat{\mu} = \overline{x_i} = \sum_i x_i/n$. I valori veramente osservati sono gli $x_i$, mentre $\overline{x}$ è ottenuto da un'operazione matematica eseguita su di essi. Comunque, si può dimostrare che la conoscenza della sola media fornisce lo stesso grado di conoscenza su $\mu$ di quello ottenibile dall'insieme dei valori osservati. Questa equivalenza è legata al concetto della cosiddetta *sufficienza statistica*.

© G. D'Agostini 2000

Ma poiché $\widehat{\mu}_1$ e $\widehat{\mu}_2$ condizionati da $\mu$ sono indipendenti, ovvero $f(\widehat{\mu}_2 \,|\, \mu, \widehat{\mu}_1) = f(\widehat{\mu}_2 \,|\, \mu)$, abbiamo il seguente risultato[9]:

$$f_{(1+2)}(\mu \,|\, \widehat{\mu}_1), \widehat{\mu}_1)) \propto f(\widehat{\mu}_1 \,|\, \mu) f(\widehat{\mu}_2 \,|\, \mu) \cdot f_\circ(\mu)\,. \qquad (10.9)$$

A questo punto si tratta di fare i conti. Assumendo, come detto sopra, una prior uniforme, esplicitando la funzione della distribuzione normale e riassorbendo via via tutti i fattori che non dipendono da $\mu$ nella costante della proporzionalità, abbiamo:

$$\begin{aligned}
f_{(1+2)}(\mu) &\propto \exp\left[-\frac{(\widehat{\mu}_1-\mu)^2}{2\,\sigma_1^2} - \frac{(\widehat{\mu}_2-\mu)^2}{2\,\sigma_2^2}\right] &(10.10)\\
&\propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\widehat{\mu}_1^2 - 2\,\widehat{\mu}_1\,\mu + \mu^2}{\sigma_1^2} + \frac{\widehat{\mu}_2^2 - 2\,\widehat{\mu}_2\,\mu + \mu^2}{\sigma_1^2}\right)\right]\\
&\propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{-2\,(\widehat{\mu}_1\,\sigma_2^2 + \widehat{\mu}_2\,\sigma_1^2)\,\mu + (\sigma_1^2+\sigma_2^2)\,\mu^2}{\sigma_1^2\,\sigma_2^2}\right)\right]\\
&\propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{-2\left(\frac{\widehat{\mu}_1\,\sigma_2^2 + \widehat{\mu}_2\,\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)\mu + \mu^2}{\frac{\sigma_1^2\,\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)\right]\\
&\propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{-2\,\overline{x}\,\mu + \mu^2}{\sigma_{\overline{x}}}\right)\right], &(10.11)
\end{aligned}$$

ove $\overline{x}$ e $\sigma_{\overline{x}}$ stanno per

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\frac{\widehat{\mu}_1}{\sigma_1^2} + \frac{\widehat{\mu}_2}{\sigma_2^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_1^2}} &(10.12)\\
\frac{1}{\sigma_{\overline{x}}^2} &= \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\,. &(10.13)
\end{aligned}$$

A questo punto, moltiplicando per la costante $\exp[-2\,\overline{x}^2/\sigma_{\overline{x}}^2]$ (anche questo è lecito) otteniamo finalmente

$$f_{(1+2)}(\mu) \propto \exp\left[-\frac{(\mu-\overline{x})^2}{2\,\sigma_{\overline{x}}^2}\right]. \qquad (10.14)$$

Abbiamo trovato quindi il seguente importante risultato:

$$\mu^{(1+2)} \sim \mathcal{N}(\overline{x}, \sigma_{\overline{x}})\,,$$

con $\overline{x} = \mathrm{E}(\mu^{(1+2)})$ e $\sigma_{\overline{x}}$ definite dalle (10.12) e (10.13).

Le formule che danno $\overline{x}$ e $\sigma_{\overline{x}}$ sono conosciute come combinazione dei risultati con gli inversi dei quadrati delle varianze. Si tratta di una media pesata, ove il peso di ogni "punto sperimentale" è pari all'inverso della varianza associata alla sua incertezza. Si noti come il peso della combinazione dei risultati

[9] Come si vede facilmente, si ottiene un risultato del tutto equivalente a quello cui si sarebbe arrivati partendo dal punto 2 del paragrafo 10.4.

© G. D'Agostini 2000

è pari alla somma dei pesi di ciascun risultato parziale. Nel caso dell'esempio numerico con il quale abbiamo iniziato la discussione abbiamo:

$$\mu^{(1+2)} = 22.7 \pm 1.3\,.$$

Come deriva dalle (10.12) e (10.13), l'incertezza standard è inferiore di ciascuna delle due incertezze standard individuali e la previsione è in una posizione intermedia, ma più vicino alla stima associata al risultato più preciso. Questo è particolarmente evidente se riscriviamo la formula (10.12) nel seguente modo:

$$\overline{x} = \widehat{\mu}_1 \frac{\sigma^2_{\overline{x}}}{\sigma^2_1} + \widehat{\mu}_2 \frac{\sigma^2_{\overline{x}}}{\sigma^2_2}\,. \tag{10.15}$$

© G. D'Agostini 2000

## 10.10 Problemi

1. Quali dei risultati non segue la convenzione standard per le cifre significative?
   a) $234.0 \pm 1.5$;
   b) $0.5 \pm 0.053$;
   c) $1.56(1 \pm 0.02)$;
   d) $777 \pm 99$;
   e) $467800 \pm 500$;
   f) $(1.35 \pm 0.04)10^{-23}$;
   g) $1.35 \times 10^{-23} \pm 12$;
   h) $1.7653(1 \pm 0.05)$;
   i) $0.00345(23)$;
   l) $10.380631\,MHz\ \pm 1.0 \cdot 10^{-5}\,MHz$;
   m) $24\,m\ \pm 0.01\,\%$;

2. Da rilevamenti su un grande numero di pozzi risulta che il residuo fisso dell'acqua ha un valore medio di $88.0\,mg/l$, con una deviazione standard di $25.0\,mg/l$. Quanto vale la probabilità che un pozzo abbia l'acqua con un residuo fisso maggiore di $180\,mg/l$?

3. La media aritmetica e la deviazione standard di una certa grandezza, misurata in unità arbitrarie su un campione di 10 elementi, valgono rispettivamente 142.9876192 e 24.06595568 (valori letti sul display del calcolatore). Quanto vale l'intervallo di fiducia, al 99 % C.L., della media della popolazione? Di quanto varia l'intervallo di fiducia se la stessa media e la stessa deviazione standard fossero state ottenute da 5 valori?

4. Per misurare il tempo necessario per una certa reazione, uno sperimentatore esegue, nelle stesse condizioni, 4 misurazioni. I valori ottenuti, espressi in secondi, sono 13.5, 14.2, 10.8, 13.1. Esprimere il risultato non incertezza al 68.3 % e al 95 %.

5. Delle prove effettuate su una bilancia con dei pesi campione hanno mostrato che essa ben tarata e che i risultati delle singole pesate si distribuiscono intorno al valore nominale con una deviazione standard di $2.3\,mg$, indipendentemente dal peso dell'oggetto. Vengono pesati tre oggetti, il primo una sola volta e gli altri due più volte. Si ottengono i seguenti campioni di valori, espressi in grammi: $\{20.0045\}$; $\{0.8721, 0.8732, 0.8703\}$; $\{$ 0.0137, 0.0138, 0.0166, 0.0153, 0.0170, 0.0168, 0.0160, 0.0107, 0.0163, 0.0185, 0.0139, 0.0135, 0.0143, 0.0154, 0.0171 $\}$. Dare il risultato delle tre misure con incertezza al 95 %. Qual'è la misura più precisa?

6. Sui dati dell'esercizio precedente: come saranno dati invece i risultati se la deviazione standard non è nota?
   Considerare anche il caso in cui si possa ipotizzare una deviazione standard ignota ma indipendente dalla misura e confrontarlo con il caso in cui non vale questa ipotesi.

7. Osservando $5\,\mu l$ di sangue al microscopio si notano 52 cellule di un certo tipo. Quanto vale, al 95 % di probabilità la concentrazione media di tali cellule nel sangue? (Ignorare l'incertezza sul volume).

8. Vengono effettuate 8 misure di conteggio, i cui risultati si presentano circa poissoniani. La media e la deviazione standard calcolata sul campione valgono rispettivamente: $\overline{x} = 65.7$ e $s = 12.0$. Calcolare la migliore stima della media teorica della distribuzione, fornendo il risultato ad un livello di confidenza del 95 %.

9. Si vuole determinare l'efficienza di un farmaco per far guarire da una certa malattia. Lo si prova su 357 persone e, di queste, 84 guariscono entro due settimane, mentre su un campione di controllo molto più grande di quello di test nessuna è guarita. a) Quanto vale, al 95 % e al 99 % l'efficienza del farmaco?
   b) Quanto deve essere grande il campione se si vuole conoscere l'efficienza con un'incertezza inferiore a 0.002 al 95 % C.L.?
   c) Un secondo farmaco, provato su 96 persone affette dalla stessa malattia, ne fa guarire 31 nello stesso tempo. Quanto vale da differenza fra l'efficienza del secondo farmaco e quella del primo?

10. Si vuole organizzare per le elezioni comunali di una grande città un "exit poll" anonimo per stimare i risultati delle elezioni prima dello spoglio finale. Assumiamo di aver scelto i seggi in maniera appropriata al fine di avere un campione che rifletta in media le caratteristiche dell'intera popolazione. Su quante persone va effettuato il sondaggio per ottenere, al livello di confidenza del 95 %, incertezze sui risultati al di sotto di un punto percentuale per tutti i partiti che ottengano fra il 10 e il 35 % dei suffragi?

11. Secondo la prima legge di Mendel sull'ereditarietà, se si incrociano individui che presentano un carattere dominante e provenienti da una linea pura ( ovvero sono omozigoti ) con individui anch'essi provenienti da una linea pura, ma che presenta il carattere recessivo, si otterrano tutti individui eventi il carattere dominante.
    Mendel effettuò 19939 incroci fra diversi caratteri dei piselli ( vedi es. 4 del capitolo 12 ), ottenendo tutti caratteri dominanti. Basandosi soltanto

sui risultati di questi esperimenti, cosa si può dire circa la probabilità che in un incrocio la legge di Mendel sia violata?

12. In uno degli esperimenti, Mendel incrociò piselli dai semi rugosi con piselli dai semi lisci, con entrambe le varietà provenienti da linee pure. Il risultato fu quello di avere tutti piselli dai semi lisci. Successivamente, nella seconda generazione, lasciò che le piante si autofecondassero ed ottenne 5474 casi di semi lisci e 1850 casi di semi rugosi. Quanto vale la probabilità di avere un individuo dal carattere dominante nella seconda generazione? Utilizzando i limiti dell'intervallo di confidenza trovato, dare il risultato anche in termini del rapporto fra frequenza del carattere dominante e frequenza del carattere recessivo.

13. Di una grandezza fisica introdotta da un gruppo di teorici si sa che essa, per definizione, deve avere un valore compreso fra -1 e 1 (unità arbitrarie). Al di là del valore accurato della grandezza, difficile da misurare, è molto importante per la comunità dei fisici sapere almeno se essa è minore di -0.5, maggiore di 0.5 o prossima a zero, per implicazioni su altre teorie. Un esperimento, progettato per determinare il valore di tale grandezza, è in grado di fornire un valore misurato distribuito intorno al valore vero secondo una normale con deviazione standard 0.20. Dopo anni di lavoro e complicate analisi si trova il valore di 0.75. Quanto vale la probabilità che il valore della grandezza fisica sia maggiore di 0.5? Determinare anche il limite inferiore al 95 %.

14. Si vuole misurare la radioattività di una certa stanza mediante l'uso di un contatore Geiger, esprimendo il risultato in conteggi al secondo. In due minuti si misurano 2250 conteggi.
    a) Quanto vale il livello di radioattività al 95 %?
    b)Il giorno dopo viene effettuata una sola misura di 1 minuto, ottenendo 1021 conteggi. Cosa si può dire sulla variazione del livello di radioattività?

15. Un campione di sostanza di 1 $\mu g$ è osservato al microscopio. In esso si trovano 171 particelle di impurità. Supponendo che queste particelle si presentano sempre a gruppi di 3, stimare quanto vale la concentrazione di impurità nel materiale, fornendo il risultato al 95 % C.L..

16. ( $\diamondsuit$ ) Un giornale effettua un sondaggio preelettorale su un campione di 437 persone. Sulla tabella che riporta i risultati si legge che il 19.68 % degli elettori voterebbe il partito A. Supponiamo che il sondaggio sia stato effettuato su un campione significativo della popolazione. Quale sarebbe la maniera più corretta di presentare in risultato?

17. ( $\diamondsuit$ ) Viene eseguita una serie di 150 misure, ottenendo $\overline{x} = 25.7$ e $s = 20.4$. Quanto vale la probabilità che, eseguendo un'altra serie di 150 misure sulla stessa grandezza fisica e nelle stesse condizioni, la media aritmetica sia maggiore o uguale di 27.4 ?

18. ( $\diamondsuit$ ) Sui dati del problema precedente: quanto vale invece la probabilità che una singola misura dia un risultato maggiore o uguale di 27.4?

19. ( $\diamondsuit$ ) Viene eseguita una serie di 100 misure, ottenendo $\overline{x} = 0.0$ e $s = 10.0$. Quanto vale la probabilità che eseguendo un'altra serie di 100 misure sulla stessa grandezza fisica e nelle stesse condizioni la media aritmetica sia compresa nell'intervallo [-1.4, 1.4]?

20. ( $\diamondsuit$ ) Un campione di sangue è osservato al microscopio e si osservano 72 paricelle di un certo tipo. Quanto vale la probabilità di contare, in altro campione di sangue proveniente soggetto ed osservato nelle stesse condizioni, un numero di particelle maggiore di 84?

21. Si utilizza un contatore per misurare il numero di decadimenti per unità di tempo di una sorgente radioattiva. Si hanno a disposizione 6400 secondi per effettuare la misura. Discutere se, al fine del calcolo dell'incertezza sulla quantità da misurare, è preferibile basarsi sul numero di conteggi totali registrati nei 6400 secondi, oppure è meglio utilizzare la distribuzione dei conteggi ottenuta in 100 intervalli di 64 secondi ciascuno.

© G. D'Agostini 2000

# Capitolo 11

# Misure indirette ed errori sistematici

## 11.1 Propagazione delle incertezze

Il problema della propagazione delle incertezze è molto più semplice dei precedenti, almeno per quanto riguarda le questioni di principio o le stime soggettive. Infatti "c'è poco da pensare": si fa semplicemente uso delle tecniche del calcolo delle probabilità per propagare l'incertezza su *variabili di partenza* in quella sulle variabili derivate. La propagazione entra quindi in gioco quando si effettuano, genericamente parlando, *misure indirette*[1].

Prima di andare avanti c'è da fare una osservazione sulla notazione. Per alleggerire le formule indicheremo con $X$, $Y$, etc. direttamente i valori veri (incerti) delle grandezze (precedentemente indicati con $\mu_x$, $\mu_y$, etc.) e non più quelli osservati. Con $\mu_x$ e $\mu_y$ saranno invece indicati i valori attesi dei valori veri (in pratica le medie aritmetiche ottenute dalle misure dirette).

### 11.1.1 Caso di combinazioni lineari

Per capire bene il problema, partiamo da variabili discrete. Per semplicità prendiamo due grandezze, $a$ e $b$, che possono assumere soltanto tre valori, con distribuzione uniforme. Ad esempio: $a_1 = 9$, $a_2 = 10$, $a_3 = 11$; $b_1 = 4$, $b_2 = 5$, $b_3 = 6$. Essendo tutti i valori equiprobabili abbiamo: $f(a_i) = f(b_i) = 1/3$. Se adesso siamo interessati alla variabile $c = a + b$, l'incertezza sul valore di $a$ e di $b$ si propaga sul valore di $c$.

Il caso discreto con tre soli valori possibili permette di seguire il "flusso di incertezza", come mostrato in tabella 11.1.1. La variabile $c$ può essere un numero compreso fra 13 e 16, ma a differenza di $a$ e di $b$, i valori non sono tutti equiprobabili. Infatti, mentre i valori estremi si possono verificare per una particolare coppia di $a$ e di $b$, ci sono più coppie che possono produrre gli altri valori. In particolare, il valore $c = 15$ è quello più probabile semplicemente perché esso può essere ottenuto da possibili coppie.

---

[1] Vedremo come entrano in gioco anche più per valutare effetti di errori sistematici di misure dirette.

| | | | $b$ | |
|---|---|---|---|---|
| | | 4 | 5 | 6 |
| | 9 | 13 | 14 | **15** |
| $a$ | 10 | 14 | **15** | 16 |
| | 11 | **15** | 16 | 17 |

Tabella 11.1: Combinazione di 3 valori di $a$ con 3 valori di $b$ che danno luogo a 5 possibili valori della somma $c = a + b$. Se si assume l'equiprobabilità di $a$ e di $b$ si arriva ad una distribuzione di probabilità del tipo triangolare (discreta).

Un caso analogo, leggermente più complicato, è mostrato in figura 11.1. Si tratta delle distribuzioni di probabilità della somma degli esiti di 1, 2 e 3 dadi. Si noti il graduale l'addensamento della probabilità nei valori centrali, dovuta ad un semplice effetto combinatorio. Per questo motivo la deviazione standard non cresce linearmente con l'ampiezza massima della distribuzione. Ad esempio, combinando due distribuzioni uniformi fra 0 e 1 (è il limite di un dado con infinite facce), non si ottiene $2/\sqrt{12}$, bensì $1/\sqrt{6}$, $\sqrt{2}$ volte più piccola (si riconosce la deviazione standard di una distribuzione triangolare!). Quelle che invece crescono linearmente sono le varianze ($2 \times 1/12 = 1/6$).

Si capisce inoltre come, per simmetria, la distribuzione delle differenze intorno al valore centrale debba essere uguale a quella delle somme.

Quindi, per due variabili indipendenti si ottiene la seguente regola di propagazione:

$$\sigma^2(X \pm Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(X)\,. \tag{11.1}$$

Consideriamo successivamente una trasformazione di scala: $Y = c\,X$. Anche la scala delle possibili fluttuazioni si trasforma nello stesso modo e, poiché il segno di $c$ è ininfluente, si ottiene:

$$\sigma(c\,X) = |c|\,\sigma(X)\,. \tag{11.2}$$

Combinando i risultati espressi dalle formule (11.1) e (11.2) si ottiene la regola generale della varianza di una combinazione lineare di variabili casuali.

$$\sigma^2\left(\sum_i c_i X_i\right) = \sum_i c_i^2 \sigma^2(X_i). \tag{11.3}$$

È importante notare che questa regola dipende soltanto dalla definizione di varianza e non dal tipo di distribuzione di probabilità delle variabili casuali.

### 11.1.2 Linearizzazione

Dalla (11.3) si ottiene la regola generale per una funzione qualsiasi, mediante linearizzazione intorno ai valori attesi. Infatti se indichiamo con $Z = Z(X, Y)$

© G. D'Agostini 2000

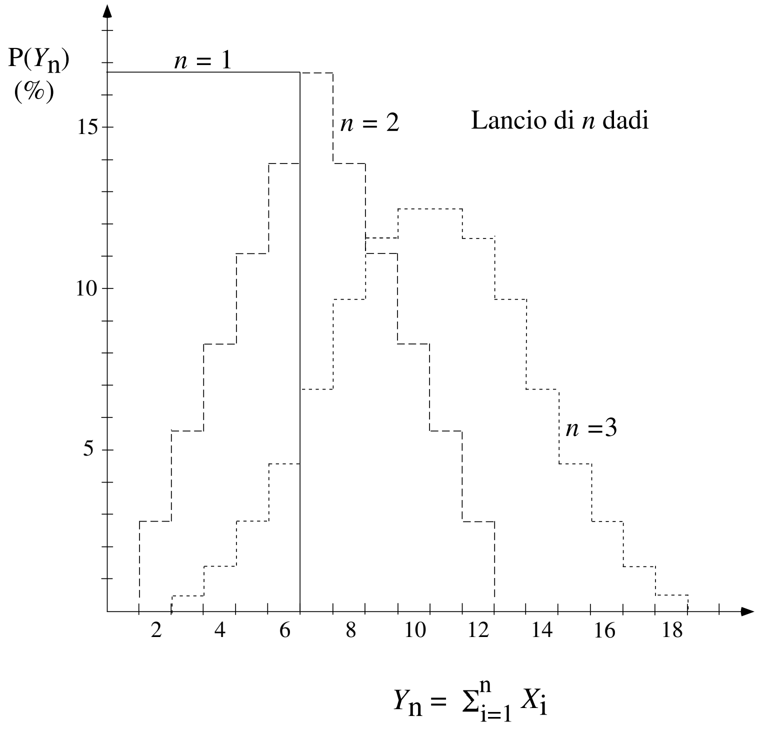


Figura 11.1: Distribuzione della somma dei risultati ottenuti dal lancio di $n$ dadi. La concentrazione della probabilità al centro della distribuzione è dovuta all'elevato numero di combinazioni risultanti in valori della somma intermedi e giustifica qualitativamente il teorema del limite centrale.

la generica funzione delle due variabili casuali $X$ e $Y$, abbiamo

$$\begin{aligned} Z = Z(X,Y) &\approx Z(\mu_z, \mu_z) + \left.\frac{\partial Z}{\partial X}\right|_{\mu_x,\mu_y} (X - \mu_x) + \left.\frac{\partial Z}{\partial Y}\right|_{\mu_x,\mu_y} (Y - \mu_y) + \dots \\ &\approx k + \left.\frac{\partial Z}{\partial X}\right|_{\mu_x,\mu_y} x + \left.\frac{\partial Z}{\partial Y}\right|_{\mu_x,\mu_y} y + \dots \\ \sigma^2(Z) &\approx \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 \sigma^2(X) + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 \sigma^2(Y)\,, \end{aligned} \tag{11.4}$$

dove $k$ contiene tutti i termini che non dipendono dalle variabili casuali e che quindi sono ininfluenti ai fini del calcolo della varianza. L'ultimo passaggio è stato ottenuto facendo uso della (11.3). È generalmente sottointeso che le derivate vadano calcolate nel punto di migliore stima di $X$ e di $Y$. Il caso generale va da sé.

Si ricordi che la (11.4) è basata su una linearizzazione. La funzione deve essere abbastanza lineare un certo numero di deviazioni standard intorno alle migliori stime delle variabili di partenza. Questo è generalmente vero se le $\sigma$ sono molto minori delle stime. Se la funzione è lineare non c'è nessun vincolo sul valore di $\sigma$. Ad esempio, se $Z = X+Y$, con $X = 0.1\pm0.7$ e $Y = 0.0\pm1.0$, si ha $Z = 0.1 \pm 1.2$.

© G. D'Agostini 2000

Per quanto riguarda l'uso della formula di propagazione, si raccomanda di fare una lista dei contributi all'incertezza totale dovuti a ciascun termine da cui la grandezza finale dipende. Questo permette di capire quale contributo sia maggiormente responsabile e sul quale bisogna intervenire al momento di pianificare un nuovo esperimento. Quindi la formula (11.4) può essere riscritta nel seguente modo, didatticamente più valido:

$$\sigma(Z) \approx \left|\frac{\partial Z}{\partial X}\right| \sigma(X) \oplus \left|\frac{\partial Z}{\partial Y}\right| \sigma(Y)\,, \tag{11.5}$$

ove con "$\oplus$" si è indicata l'operazione di *somma in quadratura*. C'è un altro modo interessante di riscrivere questa formula:

$$\sigma_Z \approx \sigma_Z(X) \oplus \sigma_Z(Y)\,, \tag{11.6}$$

in cui $\sigma_Z(X)$ e $\sigma_Z(Y)$ indicano i contribuiti all'incertezza dovuti a ciascuna delle grandezze da cui $z$ dipende. È infatti istruttivo abituarsi a pensare in termini delle componenti all'incertezza totale, piuttosto che usare ciecamente la formula (11.4). È inoltre importante dare alle derivate il significato di *coefficiente di sensibilità*, nel senso che, maggiore è la derivata, maggiore è la variazione di $Z$ a parità di variazione di $X$ o di $Y$.

Naturalmente le (11.4)-11.6 si generalizzano facilmente al caso di molte variabili. Inoltre, d'ora in poi useremo il simbolo "$=$" invece di "$\approx''$, anche se bisogna tenere ben in mente che si tratta sempre di formule approssimate, a meno che la funzione non sia lineare, ovvero la grandezza finale è combinazione lineare di quelle iniziali.

### 11.1.3 Incertezze relative

Riprendiamo la (11.4) estesa al caso generale, ovvero nel caso di $Y = Y(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

$$\sigma^2(Y) = \sum_i \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \sigma^2(x_i)\,. \tag{11.7}$$

Un caso particolarmente interessante si presenta quando la dipendenza di $Y$ da $X_i$ è data da una funzione monomia, ovvero

$$Y = kX_1^{\alpha_1} \cdot X_2^{\alpha_2} \cdots X_i^{\alpha_i} \cdot X_n^{\alpha_n}\,.$$

Molte leggi fisiche sono infatti di questo tipo ($s = \frac{1}{2} g\,t^2$, $F = M_1 \cdot M_2/R^2$, etc). La derivata di $Y$ rispetto alla generica $X_i$ si ottiene diminuendo di 1 il grado della potenza di $X_i$ e moltiplicando per $\alpha_i$. Questo è equivalente a moltiplicare la $Y$ stessa per $\alpha_i$ e poi dividere tutto per $X_i$. Si ha quindi:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial Y}{\partial X_i}\right|_{\{\mu_{X_1},\mu_{X_2}\cdots\}} &= \left.\alpha_i \frac{Y}{X_i}\right|_{\{\mu_{X_1},\mu_{X_2}\cdots\}} \approx \alpha_i \frac{\mu_Y}{X_i} \\
\sigma^2(Y) &\approx \sum_i \alpha_i^2 \frac{\mu_Y^2}{\mu_{X_i}^2}\sigma^2(X_i) \\
\frac{\sigma^2(Y)}{\mu_Y^2} &= \sum_i \alpha_i^2 \frac{\sigma(X_i)}{\mu_{X_i}} \qquad (11.8) \\
r_Y^2 &= \sum_i \alpha_i^2 r_{X_i}^2 \qquad (11.9) \\
r_Y &= |\alpha_1| r_1 \oplus |\alpha_2| r_2 \oplus \ldots\,, \qquad (11.10)
\end{aligned}
$$

dove dalla formula (11.8) abbiamo sostituito, come sopra, "$\approx$" con $=$ e abbiamo introdotto $r$ ad indicare l'incertezza relativa. Quindi, nel caso di funzioni monomie il contributo all'incertezza relativa dato da ciascuna variabile di ingresso è pari alla sua incertezza relativa moltiplicata per il modulo della potenza. I vari contributi si combinano poi quadraticamente. Si noti come l'incertezza relativa su $Y$ può essere anche inferiore a quella su $X$ se $|\alpha| < 1$ (ad esempio $Y = \sqrt{X}$). Si noti inoltre come la 11.10 è valida anche per le incertezze relative espresse in valori percentuali.

Il vantaggio pratico di utilizzare, ogni volta che è possibile, la propagazione delle incertezze relative è legato al fatto che, siccome quello che veramente importa ai fini della qualità della misura è l'incertezza relativa, essa permette di capire quali sono le grandezze più critiche sulle quali intervenire. Questo è particolarmente vero se si usa la formula 11.10 scrivendo esplicitamente tutti gli "addendi", invece di fare automaticamente. Ad esempio se si ha

$$Y = \frac{X_1 \cdot X_2^3 \cdot \sqrt{X_3}}{X_4^2}$$

con incertezze relative delle grandezze di ingresso, espresse in %, pari a $2.5\,\%$, $0.7\,\%$, $5\,\%$ e $1.5\,\%$, è opportuno scrivere

$$r_Y = 2.5\% \oplus 6.3\,\% \oplus 2.5\,\% \oplus 3.0\,\% = 7.8\,\%\,,$$

da cui si capisce subito che per migliorare il risultato bisogna misurare meglio $X_2$, anche se era già la grandezza conosciuta più precisamente.

## 11.2 Come tener conto degli errori sistematici

Oltre agli errori casuali che abbiamo descritto precedentemente ogni misura può essere affetta da errori sistematici, dei quali è impossibile accorgersi operando in condizioni di ripetitività. Essi infatti si mantengono pressoché costanti durante il periodo di tempo durante il quale sono ripetute le misure e quindi non contribuiscono alla dispersione dei dati rispetto alla media.

© G. D'Agostini 2000

### 11.2.1 Condizioni di riproducibilità

Anche le cause degli errori sistematici sono quelle della lista del paragrafo 8.6.

Per rendersi conto di eventuali errori sistematici bisogna misurare lo stesso *misurando* (ovvero la stessa grandezza fisica definita operativamente nello stesso modo) in *condizioni di riproducibilità*.[2] Per fare questo bisogna variare:

- principio di misura;
- metodo di misura;
- osservatore;
- strumenti di misura;
- condizioni di utilizzazione degli strumenti;
- luogo;
- tempo di osservazione.

### 11.2.2 Correzione dei risultati per tener conto di errori sistematici noti - calibrazioni

In genere, essendo impossibile per ogni misura effettuare tutte queste variazioni ci si *calibra* su grandezze fisiche il cui valore vero è noto (entro i limiti di accuratezza necessari). Qualora si trovano differenze fra i valori ottenuti e i valori veri si studiano accuratemente tutti i contributi al raggiungimento del risultato, effettuando eventualmente calibrazioni individuali sui singoli pezzi dell'apparato. Alla fine i risultati vengono opportunamente corretti.

### 11.2.3 Incertezze dovute all'inesatta conoscenza dell'entità di un possibile errore sistematico

Nel modo semplicistico con cui è stata posta la questione sembra che gli errori sistematici non costituiscano un problema. In realtà non è sempre possibile disporre di campioni di riferimento per ciascuna delle grandezze di interesse. Ne deriva la necessità di utilizzare strumenti commerciali calibrati, anch'essi affetti da un'inevitabile incertezza di calibrazione.

Si noti comunque che, anche potendo far uso di materiale certificato, l'accuratezza non è mai assoluta ed inoltre anche il processo di calibrazione (ottenuto uguagliando due valori entro il limite di risoluzione) è soggetto ad incertezze residue.

In conclusione, bisogna abituarsi a convivere con le incertezze dovute agli errori sistematici e a tenerne conto nel corso delle misure.

[2]La *Guida* ISO definisce *reproducibility* (of results of measurements) "closeness of the agreement between the results of measurements of the same measurand carried out under changed conditions of measurement" (i risultati si intendono già corretti per eventuali errori sistematici noti).

© G. D'Agostini 2000

### 11.2.4 Imperfetta conoscenza delle costanti di calibrazioni e dei parametri di influenza

In questa trattazione semplificata ci occuperemo di

- errori sulle costanti di calibrazioni di zero e di scala dello strumento;
- errori sulle variabili di influenza.

Anche se li abbiamo divisi per convenienza la trattazione generale è assolutamente analoga.

#### Errore di zero (offset)

Cominciamo con il considerare uno strumento affetto da un possibile errore di zero (ove intendiamo una possibile costante additiva, in inglese *offset*, da aggiungere ai valori letti). Questo caso è illustrato in figura 8.9.a, dove è mostrata la lettura sullo strumento ("risposta") in funzione del valore della grandezza ('stimolo").

L'effetto di questo tipo di errore è che la curva di risposta potrebbe essere traslata lungo le ordinata, ma di un valore incognito. Infatti, anche se uno strumento è stato calibrato, e quindi crediamo che il valore più plausibile dell'offset sia 0, la non esattezza della calibrazione ci fa ritenere che anche "piccoli" valori intorno a 0 siano possibili.

Assumiamo di potere descrivere i diversi gradi di fiducia dell'offset con una gaussiana[3] centrata in 0 e di deviazione standard $\sigma_z$. Chiamiamo inoltre $z$ la variabile casuale ad esso associata ($z$ sta per "zero vero"). Abbiamo detto che, in assenza di errore sistematico, la grandezza ha una incertezza $\sigma(\mu) = \sigma_r/\sqrt{n}$. Facciamo ora questa trasformazione di notazione

$$\mu \longrightarrow \mu_r \tag{11.11}$$
$$\sigma(\mu) \longrightarrow \sigma(\mu_r) \tag{11.12}$$

ovvero aggiungiamo il pedice $r$ per indicare che questi sono i valori veri ottenuti tenendo conto dei soli effetti casuali. Per ottenere il valore che tenga conto anche della non perfetta calibrazione bisogna sottrarre a $\mu_r$ il valor vero dell'offset:

$$\mu = \mu_r - z\,,$$

ove $z = 0 \pm \sigma_z$. Dalla propagazione delle incertezze otteniamo:

$$\sigma^2(\mu) = \sigma^2(\mu_r) + \sigma_z^2\,. \tag{11.13}$$

L'incertezza standard globale è quindi ottenuta combinando in quadratura l'incertezza standard dovuta ai soli effetti casuali con quella dell'offset.

Quando si hanno più grandezze misurate con lo stesso strumento si applica la stessa procedura a tutte le grandezze:

$$\sigma^2(\mu_i) = \sigma^2(\mu_{r_i}) + \sigma_z^2\,.$$

[3]In realtà non c'è bisogno che la distribuzione sia normale, in quanto faremo uso soltanto delle proprietà generali della varianza. Anche dal punto di vista pratico, è più frequente il caso di una distribuzione uniforme o triangolare.

© G. D'Agostini 2000

Sorge ora il problema che tutte le incertezze sono correlate: se il valore vero dello zero dovesse valere $Z = z$ tutte le misure sarebbero sbagliate di questo valore. Per studiare l'effetto delle correlazioni, immaginiamo due grandezze, $\mu_1$ e $\mu_2$ e facciamone la differenza e la somma: $D = \mu_1 - \mu_2$, $S = \mu_1 + \mu_2$. Applicando la propagazione delle incertezze che abbiamo visto, sembrerebbe che

$$\begin{aligned}
\sigma^2(D) &\stackrel{?}{=} \sigma^2(\mu_1) + \sigma^2(\mu_2) = \sigma^2(\mu_{r_1}) + \sigma^2(\mu_{r_2}) + 2\sigma_z \\
\sigma^2(S) &\stackrel{?}{=} \sigma^2(\mu_1) + \sigma^2(\mu_2) = \sigma^2(\mu_{r_1}) + \sigma^2(\mu_{r_2}) + 2\sigma_z
\end{aligned}$$

Ma c'è qualcosa che non convince; infatti, intuitivamente ci si aspetta che una incertezza dovuta all'offset debba essere ininfluente sulle differenze: un termometro può anche essere scalibrato di 10°C, ma questo non può influenzare una misura di differenza di temperature. Riscriviamo allora i valori veri a partire da quelli "solo random" più l'effetto dell'offset:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \mu_{r_1} - z \\
\mu_2 &= \mu_{r_2} - z \\
D &= \mu_1 - \mu_2 = \mu_{r_1} - \mu_{r_2} \\
S &= \mu_1 + \mu_2 = \mu_{r_1} + \mu_{r_2} - 2\,z\,.
\end{aligned}$$

Ne segue quindi

$$\sigma^2(D) = \sigma^2(\mu_{r_1}) + \sigma^2(\mu_{r_2}) \tag{11.14}$$
$$\sigma^2(S) = \sigma^2(\mu_{r_1}) + \sigma^2(\mu_{r_2}) + 4\sigma_z^2 \tag{11.15}$$

ben diverse da quelle precedenti e molto più ragionevoli.

### Errore di scala

Per il caso di fattore di scala si procede nello stesso modo. In questo caso chiamiamo $f$ il valore vero della costante di scala. Se lo strumento è calibrato al meglio, si crede che

$$f = 1 \pm \sigma_f\,.$$

Ne segue che

$$\mu = f\,\mu_r$$

e quindi

$$\sigma^2(\mu) = \sigma^2(\mu_r) + (\mu_r\,\sigma_f)^2 \tag{11.16}$$

Anche in questo caso l'incertezza globale è una combinazione quadratica di quella dovuta ai soli effetti casuali e di quella dovuta all'incertezza di calibrazione, la quale è proporzionale al valore del misurando. Utilizzando la propagazione delle incertezze relative otteniamo la formula equivalente:

$$r_\mu^2 = r_{\mu_r}^2 + \sigma_f^2\,. \tag{11.17}$$

L'incertezza di scala si somma quadraticamente all'incertezza relativa.

© G. D'Agostini 2000

Come nel caso precedente, più misure effettuate con lo stesso strumento sono correlate. Se in successive elaborazioni di queste si utilizzassero semplicemente le incertezze globali nella formula di propagazione, senza tener conto degli effetti di correlazione, si otterrebbero risultati errati.

È istruttivo, nel caso dell'incertezza di scala, considerare il prodotto $P = \mu_1 \cdot \mu_2$, il rapporto $R = \mu_1/\mu_2$ e la differenza $D = \mu_1 - \mu_2$. Lasciando per esercizio i risultati errati che si otterebbero con il procedimento naïve, ricaviamo i risultati corretti, riscrivendo prima

$$
\begin{aligned}
P &= \mu_1 \cdot \mu_2 = f^2\, \mu_{r_1}\, \mu_{r_2} \\
R &= \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_{r_1}}{\mu_{r_2}} \\
D &= \mu_1 - \mu_2 = f\,(\mu_{r_1} - \mu_{r_2})\,.
\end{aligned}
$$

Si vede subito che l'eventuale errore di scala è ininfluente nel rapporto; nel prodotto viene amplificato; nelle differenze esso dipende dalla differenza stessa e diventa trascurabile per valori molto vicini. Passando alle incertezze, abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2(P) &= \mu_2^2\sigma_r^2(\mu_1) + \mu_1^2\sigma_r^2(\mu_2) + (2\,\sigma_f\,\mu_1\,\mu_2)^2 && (11.18)\\
\sigma^2(R) &= \frac{\sigma_r^2(\mu_1)}{\mu_2^2} + \sigma_r^2(\mu_2)\frac{\mu_1^2}{\mu_2^4} && (11.19)\\
\sigma^2(D) &= \sigma_r^2(\mu_1) + \sigma_r^2(\mu_2) + \sigma_f^2\, D^2\,. && (11.20)
\end{aligned}
$$

**Importanza delle misure per differenza**

Questi risultati, insieme a quanto imparato nel caso dell'errore di zero, ci insegnano che, nel caso si sia interessati alle differenze, gli eventuali errori di calibrazione dello strumento tendono a semplificarsi e quindi ad essere irrilevanti ai fini del risultato finale. Questo è particolarmente vero quando i valori sono molto vicini.

Il caso delle differenze è importante perché molto spesso sono queste da cui dipendono i risultati finali. In particolare:

- tutte le misure di *termologia* dipendono da differenze di temperatura;
- ogni volta che si è interessati a *"coefficienti angolari"* (derivata di una grandezza in funzione di un altra) si misurano, sostanzialmente, rapporti fra differenze,

Infine, da questo risultato si impara che, quando è possibile, è preferibile *misurare per differenza* (vedi figura 11.2). Questo vale, ad esempio, per:

- misura di massa mediante bilancia: controllare l'indicazione a vuoto; aggiungere artificialmente tare aventi masse diverse per effettuare la misura in diverse zone all'interno della portata, mediando i risultati qualora differiscano fra di loro al fine di semplificare eventuali deviazioni dalla linearità della risposta;
- misura di volumi di liquidi mediante cilindri graduati: fare misure per differenza svuotando parzialmente il recipiente e facendo attenzione a tener conto del menisco del liquido sempre nello stesso modo;

© G. D'Agostini 2000

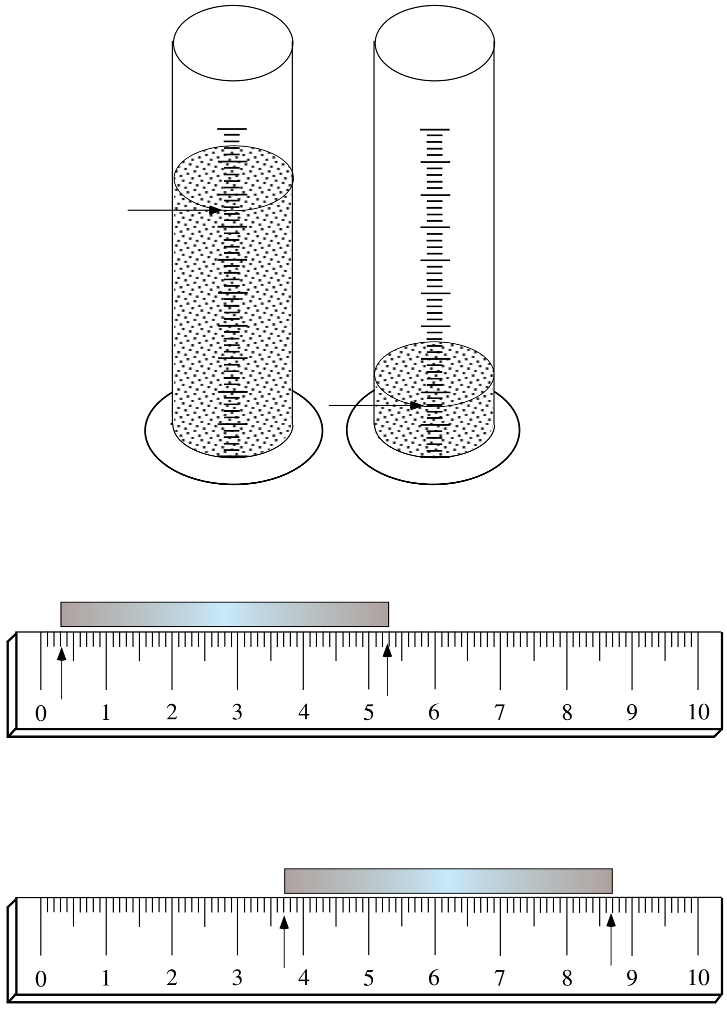


Figura 11.2: Esempi di misure per differenza nelle quali si elimina un possibile errore sullo zero dello strumento.

© G. D'Agostini 2000

- anche nella misura di lunghezze mediante righelli da disegno è raccomandabile eseguire misure partendo anche da tacche diverse da quelle dello 0, se è richiesta una elevata accuratezza del risultato.

Suggerimenti analoghi valgono anche per misure di differenze di potenziale e simili.

### 11.2.5 Casi di errore di più difficile schematizzazione

Per terminare, consideriamo il caso d) di figura 8.9. Essa indica che le deviazioni della lettura dal valore vero non sono schematizzabili né con un semplice errore di zero né con uno di scala. Il caso riportato è quello di un calibro Palmer, secondo le norme DIN 863. La figura sta ad indicare che il costruttore garantisce che, se lo strumento è usato nel modo corretto e alla temperatura di riferimento, la differenza fra indicazione e valore vero non eccederà i limiti indicati, in tutto l'intervallo di misura dello strumento. La curva spezzata va intesa soltanto in modo illustrativo dell'irregolarità delle deviazioni (a meno che non sia verificata con blocchetti di calibrazione, ma in questo caso le deviazione andrebbero utilizzate per correggere i dati e non per la valutazione dell'incertezza). Uno strumento che si comporta più o meno in questo modo è il cosiddetto "strumento universale analogico" (tipo tester ICE ancora utilizzato nei laboratori di esperienze didattiche).

Chiaramente, la modellizzazione di questo caso è più problematica, specialmente per quanto riguarda le correlazioni. Le indicazioni di massima che si possono suggerire sono le seguenti:

- per quanto riguarda una singola misura, l'incertezza standard da associare ad una possibile deviazione sistematica è pari alla deviazione standard di una distribuzione uniforme nell'intervallo di tolleranza ($\sigma =$ larghezza dell'intervallo divisa $\sqrt{12}$);

- due letture abbastanza ravvicinate sono fortemente correlate e quindi gli effetti sistematici possono essere ignorati se si è interessati alle loro differenze;

- due letture molto distanti possono essere considerate scorrelate;

- se si effettua una serie di misure in funzione di un'altra, al fine di studiarne l'andamento, queste piccole deviazioni possono essere considerate, al fine dell'analisi, come contributi casuali (vedi paragrafo 10.5.2 e primo punto del paragrafo 12.7);

- volendo sfruttare le potenzialità di precisione dello strumento, ovviando ai limiti di accuratezza, è necessario eseguire delle calibrazioni assolute su valori di riferimento, o almeno calibrazioni relative con qualche accorgimento[4].

[4] Ad esempio un voltmetro può essere calibrato in modo relativo (rispetto al valore di fondo scala) utilizzando un partitore di precisione: ogni deviazione dalla linearità sarà imputato al comportamento del voltmetro e la lettura potrà essere corretta. Per fare un buon partitore economico è sufficiente prendere una ventina di resistori all'1 % tutti uguali e presi nuovi dalla stessa striscia con cui sono confezionati. Le variazioni relative di resistenza sono ben inferiori all'1 % e la loro combinazione riduce ancora di più le incertezze relative.

© G. D'Agostini 2000

### 11.2.6 Incertezza su un fattore di influenza

Affrontiamo questo argomento con un caso specifico. Supponiamo di dover determinare la lunghezza di una barretta di materiale avente un alto coefficiente di dilatazione termica. Affinché la misura abbia senso, occorre specificare nella definizione del misurando anche il valore della temperatura di riferimento. In genere si utilizza come riferimento $T_\circ = 20°$C. Questo non implica che bisogna lavorare esattamente a questa temperatura, essendo ciò impossibile in linea di principio. Il valore di temperatura può essere, al più, nominalmente 20°C, con una incertezza di $\sigma_T$; oppure la misura viene eseguita ad una temperatura $T \pm \sigma_T$ diversa da $T_\circ$ (ad esempio se non è possibile trasportare il misurando in un piccolo ambiente termostatato).

In questi casi è possibile sia

- correggere il valore misurato per effetto della differenza di temperatura;
- associare al risultato un nuovo contributo all'incertezza globale, dovuto all'eventuale incertezza sulla temperatura;

a condizione che sia noto il coefficiente di dilatazione termica

$$\alpha \pm \sigma_\alpha$$

(noto anch'esso con una eventuale incertezza...).

Indicando con $l$ la lunghezza e $\Delta T = T - T_\circ$, considerando $\alpha \ll 1$ e assumendo (per semplicità) che lo strumento di misura non subisca la dilatazione termica, si ha (vedi anche figura 8.3):

$$\begin{aligned} l_T &= l_{T_\circ}(1+\alpha\,\Delta T) \\ l_{T_\circ} &= \frac{l_T}{(1+\alpha\,\Delta T)} \approx l_T(1-\alpha\,\Delta T) = \beta\, l_T \end{aligned} \tag{11.21}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(l_{T_\circ}) &= \beta^2\sigma^2(l_T) + l_T^2\,\sigma^2(\beta) \\ &= (1-\alpha\,\Delta T)^2\sigma^2(l_T) + l_T^2\left(\Delta T^2\sigma_\alpha^2 + \alpha^2\sigma_{\Delta T}^2\right)\,. \end{aligned} \tag{11.22}$$

Si noti che:

- anche se $\Delta T = 0$ ($T = T_\circ$) resta sempre una incertezza dovuta alla non perfetta conoscenza della temperatura;
- se il coefficiente di dilatazione non è ben noto ($\sigma(\alpha)$ "grande") è raccomandabile cercare di effettuare la misura ad una temperatura molto prossima a quella di riferimento;
- se invece $\alpha$ è "perfettamente noto" il risultato non dipende dalla temperatura alla quale si effettuano le misure.
- se si eseguono più misure a temperature diverse da $T_\circ$ (anche diverse fra loro), le loro incertezze saranno correlate a causa del comune coefficiente di dilatazione usato per correggere i risultati; nel caso di analisi successive se ne può tenere conto come visto per costanti di calibrazione.

L'esempio mostrato si estende in modo immediato ad altri fattori di influenza, eventualmente anche concomitanti.

© G. D'Agostini 2000

### 11.2.7 Propagazione senza derivate

Come inciso facciamo notare che è sempre possibile propagare le incertezze linearizzando la dipendenza fra valore della grandezza di interesse e quella di una variabile di influenza mediante sviluppo in serie analitico. Molto spesso può essere più comodo e rapido (o anndirittura sarebbe impossibile altrimenti) studiare come varia il valore della grandezza apportando variazioni di $\pm 1\,\sigma$ alla variabile di influenza. Se la dipendenza è circa lineare, le variazioni risultanti corrispondono circa alla deviazione standard della grandezza di interesse. Chiaramente, il concetto è lo stesso. Si sta soltanto facendo una derivata con metodo numerico. Va anche da sé che è importante controllare che l'andamento sia circa lineare. In genere un controllo rapido è consiste nel verificare che le deviazioni per $+\sigma$ e $-\sigma$ siano della stessa entità.

### 11.2.8 Calibrazione, intercalibrazione e "randomizzazione"

Anche se abbiamo visto come gestire le incertezze che derivano da errori sistematici tipici, è preferibile, nei limiti del possibile, lavorare con strumenti calibrati al meglio, ovvero con possibili errori residui di calibrazione dell'ordine di grandezza (o minori) delle deviazioni standard di ripetibilità $\sigma_r$.

Va da sé che strumenti ben calibrati significa strumenti costosi, e non è sempre possibile avere a disposizione tali strumenti per esperienze didattiche (e nemmeno sempre per la ricerca). È allora opportuno imparare ad operare mediante *intercalibrazioni*. Questa procedura, unita a quelle delle misure per differenza, permette di minimizzare gli errori sistematici strumentali e di semplificare le elaborazioni dei dati. Da quanto detto seguono i seguenti suggerimenti:

1. è bene avere almeno uno strumento di riferimento costoso ad alta "precisione" (in realtà bisognerebbe dire ad alta *accuratezza*): ricalibrando su di esso gli strumenti economici è equivalente ad avere tanti strumenti costosi;

2. quando si devono misurare contemporaneamente diverse grandezze omogenee, è opportuno almeno intercalibrare gli strumenti.

Accenniamo ancora ad un ultimo metodo per ridurre, all'occorrenza, i possibili errori sistematici degli strumenti, qualora non sia possibile effettuare una calibrazione assoluta per diversi valori della grandezza e a;tresì non sia possibile lavorare per differenze, oppure ciò sarebbe possibile ma l'errore dello strumento non è di facile modellizzazione (tipo il caso d) di figura 8.9).

In questi casi si possono ripetere le misure con diversi strumenti, preventivamente intercalibrati per un valore centrale delle letture. Mediando i risultati si ottiene una compensazione dei diversi fattori casuali di ciascuno strumento (casuale nel solito senso di incerto: anche se la curva di risposta dello strumento rimane fissa, per ciascuno di essi non si sa quale essa sia). Questa tecnica può essere chiamata di *randomizzazione*.

© G. D'Agostini 2000

## 11.3 Coefficiente di correlazione

A questo punto, avendo introdotto nel paragrafo 11.2.4 il concetto di correlazione fra valori di grandezze fisiche che hanno incertezze comuni e avendo mostrato la loro importanza nelle inferenze successive, introduciamo il coefficiente di correlazione[5]. Esso è indicato con $\rho(\mu_1, \mu_2)$, può avere valori compresi fra -1 e 1 ed è atto a misurare il grado di correlazione (lineare[6]) fra le due grandezze. Il concetto intuitivo (nell'applicazione alle misure) è il seguente

- $\rho(\mu_1, \mu_2) > 0$ sta ad indicare che, se il valore vero $\mu_1$ è maggiore di quello stimato, anche il valore vero $\mu_2$ è maggiore del corrispondente valore stimato;
- se $\rho(\mu_1, \mu_2) < 0$, ad una sovrastima di una grandezza corrisponde una sottostima dell'altra;
- se $\rho(\mu_1, \mu_2) = 0$, sovrastime e sottostime dei due valori sono indipendenti.

È chiaro quindi che, nel caso di errori di zero e di scala, il coefficiente di correlazione fra due grandezze misurate direttamente con lo stesso strumento può essere soltanto $\geq 0$: tutti i valori saranno eventualmente mal determinati nello stesso verso.

Per quanto riguarda l'entità delle possibili sovrastime e sottostime, si può dimostrare che esse sono misurate in termini della deviazione standard:

> se $\mu_1$ è sovrastimato di $k$ volte $\sigma(\mu_1)$, allora $\mu_2$ è sovrastimato di $k$ volte $\rho(\mu_1, \mu_2)\, \sigma(\mu_2)$.

Spesso si fa uso anche di un'altra grandezza per quantificare le correlazioni, sebbene in modo molto meno immediatamente percepibile. Essa è la *covarianza*, indicata con $\mathrm{Cov}(\mu_1, \mu_2)$ e legata al coefficiente di correlazione da

$$\mathrm{Cov}(\mu_1, \mu_2) = \rho(\mu_1, \mu_2)\sigma(\mu_1)\sigma(\mu_2)\,. \tag{11.23}$$

Si noti come la covarianza abbia dimensioni che sono il prodotto delle dimensioni delle due grandezze. Per questo è difficile dal suo valore farsi un'idea intuitiva dell'entità delle correlazioni.

### 11.3.1 Valutazione pratica di $\rho$ dovuto ad errori di calibrazione

Per ottenere in modo euristico una regoletta pratica per il calcolo del coefficiente di correlazione dovuto ad errori di calibrazione di zero o di scala si può ragionare nel seguente modo:

- per quanto detto precedentemente il coefficiente di correlazione è $\geq 0$;
- se lo strumento è perfettamente calibrato, non si introduce alcuna correlazione fra le misure e, nel contempo, è nullo il contributo all'incertezza totale;

[5] Questo approccio molto euristico potrebbe servire anche a chi lo conosce da testi di probabilità.

[6] Questo è un punto importante, ma sul quale purtroppo non possiamo entrare in dettaglio.

© G. D'Agostini 2000

- se l'incertezza dovuta alla calibrazione è molto maggiore di quella dovuta agli effetti casuali, essa domina l'incertezza globale e quindi la correlazione sarà di +1 ("100 %").

Il coefficiente di correlazione calcolato come

$$\rho = \frac{\text{prodotto delle incertezze "comuni"}}{\text{prodotto delle incertezze totali}}$$

soddisfa questi requisiti ("comuni" sta per "introdotte dall'effetto sistematico comune"). In effetti, si può dimostrare che, per i casi che ci interessano, la formula è corretta.

Otteniamo quindi, per i due tipi di errori considerati:

**errore di zero**

$$\rho(\mu_1, \mu_2) = \frac{\sigma_z^2}{\sqrt{(\sigma_r^2(\mu_1) + \sigma_z^2)\ (\sigma_r^2(\mu_2) + \sigma_z^2)}} \,. \qquad (11.24)$$

**errore di scala**

$$\rho(\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1\, \mu_2 \sigma_f^2}{\sqrt{\left(\sigma_r^2(\mu_1) + \mu_1^2 \sigma_f^2\right)\ \left(\sigma_r^2(\mu_2) + \mu_2^2 \sigma_f^2\right)}} \,. \qquad (11.25)$$

## 11.4 Propagazione di varianze e covarianze

Le (11.24) e (11.25) permettono di calcolare i coefficienti di correlazione e le covarianze fra grandezze misurate con lo stesso strumento. Ma le correlazioni sono generate anche per altre cause. Infatti, vale in generale:

> *più grandezze ottenute per misura indiretta a partire da un insieme comune di grandezze di base, ciascuna nota con una sua incertezza, hanno in genere valori correlati.*

Le grandezze misurate con lo stesso strumento sono soltanto un caso particolare in cui le stesse informazioni comuni sono le costanti di calibrazione. Altri casi importanti sono:

- più grandezze misurate indirettamente da un insieme di grandezze misurate direttamente;
- i parametri delle curve che descrivono una legge fisica (ad esempio intercetta e coefficiente angolare di un fit lineare) .

Per comodità diamo la regola generale di propagazione che tiene conto delle correlazioni fra *variabili di partenza* e fornisce anche le correlazioni fra le *variabili di arrivo*, senza volerne dare una dimostrazione o giustificazione (si vedano, ad esempio, dispense sulla probabilità). Per semplificare le formule usiamo la seguente notazione:

$\mathbf{X_i}$ sono le $n$ variabili di partenza (corrispondenti alle $\mu_{X_i}$ nel formalismo usato finora);

© G. D'Agostini 2000

$\mathbf{Y_k}$ sono le $m$ variabili di arrivo (corrispondenti a $\mu_{Y_k}$);

$\sigma_{\mathbf{X_{ij}}}$**:** è una notazione compatta che riassume varianze e covarianze:

- se $i = j$ esse sono le $n$ varianze delle $X_i$:

$$\sigma_{X_{ii}} = \sigma^2_{X_i} = \sigma^2(X_i)\,.$$

- se $i \neq j$ esse sono le covarianze:

$$\sigma_{X_{ij}} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)\,,$$

- essendo, per ovvi motivi, $\rho(X_i, X_j) = \rho(X_j, X_i)$, ne segue che anche $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ è uguale a $\mathrm{Cov}(X_j, X_i)$ e quindi $\sigma_{X_{ij}} = \sigma_{X_{ji}}$.

$\sigma_{\mathbf{Y_{kl}}}$ sono le analoghe delle $\sigma_{X_{ij}}$ per le $Y_k$;

$\mathbf{Y_k = Y_k(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$ sono le funzioni che legano le $Y_k$ alle $X_i$;

**le derivate** si intendono calcolate in corrispondenza dei valori attesi ("migliori stime") delle $X_i$.

Con questa notazione la formula compatta di propagazione di varianze e covarianze è:

$$\sigma_{Y_{kl}} = \sum_{i,j} \frac{\partial Y_k}{\partial X_i}\frac{\partial Y_l}{\partial X_j}\sigma_{X_{ij}}\,, \tag{11.26}$$

$$ovvero$$

$$\sigma_{Y_{kl}} = \sum_{i,j} \frac{\partial Y_k}{\partial X_i}\frac{\partial Y_l}{\partial X_j}\rho_{ij}\sigma_{X_i}\sigma_{X_j}\,, \tag{11.27}$$

dove la sommatoria si estende alle $n \times n$ combinazioni degli indici $i$ e $j$. Gli indici $k$ e $l$ variano invece fra 1 e $m$.

Come esempio, ricaviamo mediante la (11.26) l'incertezza della somma e della differenza di due grandezze affette da errore di zero comune facendo uso della (11.13) e della (11.24). Inoltre possiamo calcolare la covarianza fra $S$ e

© G. D'Agostini 2000

$D$ (e da questa, banalmente, il coefficiente di correlazione):

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \mu_1 \text{ (vecchia notazione)} \\
X_2 &= \mu_2 \text{ (vecchia notazione)} \\
Y_1 &= S = X_1 + X_2 \\
Y_2 &= D = X_1 - X_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2(S)(= \sigma_{Y_{1,1}}) &= (+1)\cdot\sigma_{Y_{1,1}} + (+1)\cdot\sigma_{Y_{1,2}} + (+1)\cdot\sigma_{Y_{2,1}} + (+1)\cdot\sigma_{Y_{2,2}} \\
&= \left(\sigma^2(\mu_{r_1}) + \sigma_Z^2\right) + \sigma_Z^2 + \sigma_Z^2 + \left(\sigma^2(\mu_{r_2}) + \sigma_Z^2\right) \\
&= \sigma^2(\mu_{r_1}) + \sigma^2(\mu_{r_2}) + 4\,\sigma_Z^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2(D)(= \sigma_{Y_{2,2}}) &= (+1)\cdot\sigma_{X_{1,1}} + (-1)\cdot\sigma_{X_{1,2}} + (-1)\cdot\sigma_{X_{2,1}} + (+1)\cdot\sigma_{X_{2,2}} \\
&= \sigma^2(\mu_{r_1}) + \sigma^2(\mu_{r_2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(S,D)(= \sigma_{Y_{1,2}}) &= (+1)\cdot\left(\sigma^2(\mu_{r_1}) + \sigma_Z^2\right) + (-1)\cdot\sigma_Z^2 + \\
&\quad (+1)\cdot\sigma_Z^2 + (-1)\cdot\left(\sigma^2(\mu_{r_2}) + \sigma_Z^2\right) \\
&= \sigma^2(\mu_{r_1}) - \sigma^2(\mu_{r_2})\,.
\end{aligned}
$$

Abbiamo riottenuto $\sigma(S)$ e $\sigma(D)$ che conoscevamo (vedi (11.14) e (11.15)).

Per quanto riguarda la covarianza, si noti come il risultato non sia affatto intuitivo. Questo dovrebbe insegnare che, quando i problemi diventano importanti e complicati, bisogna fare molta attenzione agli effetti di correlazione.

Infine, riscriviamo la (11.27) per il calcolo della varianza (ovvero indici $h$ e $l$ uguali):

$$
\sigma_Y^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial Y}{\partial X_i}\frac{\partial Y}{\partial X_j}\rho_{ij}\sigma_{X_i}\sigma_{X_j}\,. \tag{11.28}
$$

### 11.4.1 Formula generale per le incertezze relative

Applicando quanto detto nel paragrafo 11.1.3 all'espressione generale della varianza, otteniamo la formula di propagazione delle incertezze relative tenendo conto anche delle correlazioni fra le $X_i$. Quindi se abbiamo una funzione monomia, ovvero del tipo

$$
Y = k\,X_1^{\alpha_1}\cdot X_2^{\alpha_2}\cdot\ \ldots\ \cdot X_n^{\alpha_n}\,,
$$

l'incertezza relativa su $Y$ è data da

$$
r_Y^2 = \sum_{i,j} \alpha_i\,\alpha_j\,\rho(X_i, X_j)\,r_{X_i}\,r_{X_j}\,. \tag{11.29}
$$

## 11.5 Casi notevoli di propagazione di incertezze

Elenchiamo per comodità alcuni dei casi di misure indirette che capitano più di frequente:

© G. D'Agostini 2000

| $Y = f(\cdot)$ | $\rho$ | $\sigma_Y$ o $r_Y$ |
|---|---|---|
| $X_1 + X_2$ | 0 | $\sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ |
| | 1 | $\sigma_Y = \sigma_1 + \sigma_2$ |
| | -1 | $\sigma_Y = \lvert\sigma_1 - \sigma_2\rvert$ |
| $X_1 - X_2$ | 0 | $\sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ |
| | 1 | $\sigma_Y = \lvert\sigma_1 - \sigma_2\rvert$ |
| | -1 | $\sigma_Y = \sigma_1 + \sigma_2$ |
| $X_1 \cdot X_2$ | 0 | $r_Y^2 = r_1^2 + r_2^2$ |
| | 1 | $r_Y = r_1 + r_2$ |
| | -1 | $r_Y = \lvert r_1 - r_2\rvert$ |
| $X_1/X_2$ | 0 | $r_Y^2 = r_1^2 + r_2^2$ |
| | 1 | $r_Y = \lvert r_1 - r_2\rvert$ |
| | -1 | $r_Y = r_1 + r_2$ |
| $a \cdot X$ | - | $\sigma_Y = a \cdot \sigma_X$ |
| $X^a$ | - | $r_Y = a \cdot r_X$ |
| $\sqrt{X}$ | - | $r_Y = \frac{1}{2} \cdot r_X$ |
| $k \cdot \ln{(X/x_\circ)}$ | - | $\sigma_Y = \lvert k\rvert \cdot r_X$ |
| $k \cdot \exp{(X/x_\circ)}$ | - | $r_Y = \sigma_X / \lvert x_\circ\rvert$ |

## 11.6 Formalismo della matrice di covarianza

Riscriviamo la formula generale (11.26) nel seguente modo

$$\sigma_{Y_{kl}} = \sum_i \frac{\partial Y_k}{\partial X_i} \left( \sum_j \sigma_{X_{ij}} \frac{\partial Y_l}{\partial X_j} \right) . \tag{11.30}$$

Si riconosce un operazione fra matrici del seguente tipo:

$$\mathbf{V}_Y = \mathbf{M}\mathbf{V}_X\mathbf{M}^T , \tag{11.31}$$

ove $\mathbf{V}_Y$ sta per la *matrice di covarianza* delle $Y$, $\mathbf{V}_X$ per la matrice di covarianza delle $X$ e $\mathbf{M}$ per la matrice $m \times n$ delle derivate delle $Y$ rispetto alle $X$. Esplicitamente:

$$\mathbf{V}_X = \begin{pmatrix} \sigma^2(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \cdots \\ \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \sigma^2(X_2) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{11.32}$$

$$\mathbf{V}_Y = \begin{pmatrix} \sigma^2(Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) & \cdots \\ \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) & \sigma^2(Y_2) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{11.33}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} & \cdots \\ \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} . \tag{11.34}$$

© G. D'Agostini 2000

Chiaramente, questo è semplicemente un modo formale più compatto di vedere la propagazione di incertezze e correlazioni nell'approssimazione lineare, e non contiene niente di più profondo che non sia già nella (11.26).

## 11.7 Raccomandazioni BIPM/ISO

Confrontiamo ora i risultati ottenuti con quanto raccomandato dal BIPM e dall'ISO.

1. *The uncertainty in the result of a measurement generally consists of several components which may be grouped into two categories according to the way in which their numerical value is estimated:*

   **A:** *those which are evaluated by statistical methods;*

   **B:** *those which are evaluated by other means.*

   *There is not always a simple correspondence between the classification into categories A or B and the previously used classification into "random" and "systematic" uncertainties. The term "systematic uncertainty" can be misleading and should be avoided.*

   *The detailed report of the uncertainty should consist of a complete list of the components, specifying for each the method used to obtain its numerical result.*

   La prima raccomandazione afferma, sostanzialmente, che tutte le incertezze possono essere trattate probabilisticamente. La distinzione fra tipo A e tipo B è sottile e potrebbe essere fuorviante per chi pensasse che "metodo statistico" sia sinonimo di "metodo probabilistico", perché allora sembrerebbe che le incertezze di tipo B non siano probabilistiche. In realtà, qui "statistico" è legato a "dati statistici", ovvero a osservazioni ottenute ripetendo l'esperimento. Possiamo dire che, a grandi linee e per molte applicazioni, le incertezze di tipo A siano quelle dovute ad errori casuali e quelle di tipo B ad errori sistematici. Ma questo non è sempre vero. Questa è la ragione della strana nomenclatura.

   Come esempio di un caso di incertezza di tipo B dovuta ad errori statistici, si pensi al seguente esperimento: eseguo molte misure per tre valori di $pH$ (intorno a 2, 4 e 6) e trovo tre deviazioni standard fra loro compatibili, $\sigma_r = 0.15$; successivamente eseguo una sola misura con lo stesso strumento, nelle stesse condizioni, di un'altra soluzione e ottengo 5.30. L'incertezza dovuta ad errori statistici è chiaramente 0.15, ma essa è di tipo B in quanto proviene da misure su un altro misurando.

2. *The components in category A are characterized by the estimated variances $s_i^2$ (or the estimated "standard deviations" $s_i$) and the number of degrees of freedom $\nu_i$. Where appropriate, the covariances should be given.*

   Le $s_i$ di cui si parla corrispondono alle stime delle $\sigma_r$ ottenute mediante misure ripetute sul misurando di interesse (e non note da conoscenze precedenti). Il numero di gradi di libertà è legato al problema dei piccoli campioni e all'uso della $t$ di Student. Come discusso nel paragrafo

© G. D'Agostini 2000

10.5.1, questo è un problema delicato che non andrebbe trattato meccanicamente. In ogni caso, fornire la numerosità del campione utilizzato è sicuramente una buona pratica. Quando non lo si fornisce vuol dire che è "grande". Infine, quando si eseguono simultanemente coppie (almeno) di misure va anche fornita la stima della varianza (o del coefficiente di correlazione).

3. *The components in category B should be characterized by quantities $u_j^2$, which may be considered as approximations to the corresponding variances, the existence of which is assumed. The quantities $u_j^2$ may be treated like variances and the quantities $u_j$ like standard deviations. Where appropriate, the covariances should be treated in a similar way.*

   Chiaramente, questa norma ha senso solo se la probabilità è intesa in senso soggettivo. Vedremo nel seguito come valutare questo contributo. Anche queste incertezze possono essere correlate. Ad esempio se una misura dipende dalla curva di calibrazione di un certo strumento, ricavata da misure precedenti, l'incertezza dipende dall'incertezza sui parametri della curva, i quali sono in genere correlati.

4. *The combined uncertainty should be characterized by the numerical value obtained by applying the usual method for the combination of variances. The combined uncertainty and its components should be expressed in the form of "standard deviations".*

   Si tratta della propagazione delle incertezze di cui abbiamo parlato. Anche in questo caso è importante il punto di vista secondo il quale anche i valori veri sono variabili casuali.

5. *If, for particular applications, it is necessary to multiply the combined uncertainty by a factor to obtain an overall uncertainty, the multiplying factor used must always stated.*

   L'ultima raccomandazione afferma ancora una volta che l'incertezza dovrebbe essere per convenzione la deviazione standard della distribuzione di probabilità del valore vero. Eventualmente si possono usare altre definizioni di incertezza, ad esempio un intervallo di credibilità del 90, 95 o 99 %, purché venga esplicitamente dichiarato. Ad esempio, sotto ipotesi di distribuzione gaussiana del valore vero intorno al valore stimato questi intervalli possono essere calcolati dalle tabelle della distribuzione normale.

Riassumiamo i presupposti teorici che sono alla base delle raccomandazioni BIPM/ISO.

**Probabilità soggettiva:** permette di parlare di probabilità, e quindi di deviazione standard, dei valori di qualsiasi grandezza fisica; essa è, in particolare, cruciale per:

- incertezze di tipo B;
- propagazione delle incertezza;

- interpretazione probabilistica del risultato.

**Incertezza come deviazione standard:**

- è “standard”;
- le regole di propagazione si applicano alle varianze e non agli intervalli di credibilità.

**Incertezza standard combinata:** è ottenuta dalla formula di propagazione delle varianze e fa uso di varianze, covarianze (o coefficienti di correlazione) e derivate prime; si ricordi sempre che si tratta di una formula approssimativa che assume un andamento circa lineare intorno ai valori attesi delle grandezze;

**Teorema del limite centrale:** fa sì che, sotto opportune condizioni, il valore vero sia distribuito normalmente anche quando sia ottento da grandezze la cui incertezza non è descritta da un modello gaussiano.

## 11.8 Valutazione delle incertezze di tipo B

Le incertezze di tipo $B$ sono indubbiamente quelle più critiche da valutare. Vediamo innanzitutto cosa raccomanda la *Guida*, poi mostriamo degli esempi.

> *For estimate $x_i$ of an input quantity*[7] *$X_i$ that has not been obtained from repeated observations, the ... standard uncertainty $u_i$ is evaluated by scientific judgement based on all the available information on the possible variability of $X_i$. The pool of information may include*
>
> - *previous measurement data;*
> - *experience with or general knowledge of the behaviour and properties of relevant materials and instruments;*
> - *manufacturer's specifications;*
> - *data provided in calibration and other certificates;*
> - *uncertainties assigned to reference data taken from handbooks.*

Detto nel linguaggio probabilistico adottato, si cerca di modellizzare, in base alla migliore conoscenza del problema, la distribuzione dei gradi di fiducia (considerando, ad esempio, gli estremi dell'intervallo di valori possibili, se ci sono valori più credibili di altri, e così via) e successivamente se ne ricava la deviazione standard. Anche se la modellizzazione è rozza e la deviazione standard che ne deriva è incerta, è importante notare che:

- le deviazioni standard valutate da piccoli campioni di dati sperimentali non sono meno incerte di quelle ottenute “by scientific judgement”; ad esempio in un modello gaussiano l'incertezza relativa sulla valutazione è approssimativamente uguale a $1/\sqrt{2\,(n-1)}$. Per $n = 5$, $10$ e $20$ essa è $\approx 35$, $24$ e $16$ %;

[7]Per “grandezza d'ingresso” la *Guida* ISO intende tutte le grandezze che contribuiscono alla valutazione del valore della grandezza di interesse (costanti di calibrazione, parametri di influenza, valori tabulati, risultati di esperimenti precedenti, etc.).

© G. D'Agostini 2000

- è preferibile dare le stime più verosimili delle deviazioni standard, invece di sovrastimare per motivi di prudenza: se si danno sempre le migliori stime, le incertezze globali saranno mediamente corrette; se si sovrastima ad ogni passo, saranno mediamente esagerate anche le incertezze globali.
- il modello finale di distribuzione del valore vero è reso circa normale dalla combinazione delle varianze (teorema del limite centrale) indipendentemente dalla forma esatta della distribuzione assunta.

Facciamo degli esempi.

1. Misure di altre grandezze particolari, prossime a quella di interesse ed eseguite nelle stesse condizioni, hanno fornito una deviazione standard di ripetitività $\sigma_r$. È ragionevole assumere per l'incertezza
$$u = \sigma_r\,.$$
2. Il certificato di calibrazione di un costruttore dichiara che l'incertezza, definita come $k$ deviazioni standard, è "$\pm\Delta$":
$$u = \frac{\Delta}{k}\,.$$
3. Un ricercatore afferma che una certa grandezza vale, al 90 %, $\ldots \pm \Delta$. Assumendo, ragionevolmente, un modello gaussiano:
$$u = \frac{\Delta}{1.64}\,.$$
4. Una pubblicazione riporta un risultato come $\overline{x} \pm \Delta$, specificando che la media è stata eseguita con 4 valori (3 gradi di libertà) e che l'incertezza è data al 95 %. Si deduce che, verosimilmente, l'intervallo è stato calcolato mediante la $t$ di Student. Ne segue (consultando opportune tabelle):
$$u = \frac{\Delta}{3.18}\,.$$
5. Un manuale di istruzione dichiara che l'errore massimo che lo strumento fornisce è compreso entro $\pm\Delta$. In mancanza di ulteriori affermazioni, si può assumere una distribuzione uniforme:
$$u = \frac{2\Delta}{\sqrt{12}} = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = 0.58\Delta \approx 0.6\Delta\,.$$
6. Un parametro è compreso, con la quasi sicurezza, entro $\pm\Delta$, ma si tende a credere più ai valori centrali che a quelli estremi. In questo caso, è più ragionevole ipotizzare una distribuzione triangolare:
$$u = \frac{\Delta}{\sqrt{6}} = 0.41\,\Delta \approx 0.4\,\Delta\,.$$

© G. D'Agostini 2000

In modo alternativo, l'informazione potrebbe essere anche compatibile con un modello gaussiano con l'intervallo a 2 o 3 $\sigma$. Si otterebbero allora $u = \Delta/2$ o $\Delta/3$, valori a cavallo di quanto ottenuto con la triangolare. Quindi quest'ultima può essere considerata un compromesso per quantificare quello stato di incertezza.

7. Si legge un valore su uno strumento digitale, in cui l'intervallo di scala (la variazione della grandezza associata alla variazione di una unità della cifra meno significativa) vale $I$. Il valore vero potrebbe essere ovunque nell'intervallo ampio $I$. Quindi L'incertezza da associare alla quantizzazione della lettura è pari a

$$u = \frac{I}{\sqrt{12}} = 0.29\, I \approx 0.3\, I\,.$$

La figura 11.3 mostra alcuni delle distribuzioni più comuni per modellizzare le incertezze di tipo B. Per ogni distribuzione sono riportate anche le espressioni del valore medio, varianza, skewness e kurtosis. Questi ultimi due indicatori di forma sono utili qualora si intendesse effettuare la propagazione delle incertezze con uno sviluppo al secondo ordine.

## 11.9 Esempi numerici

Facciamo ora degli esercizi numerici su alcuni dei concetti più critici.

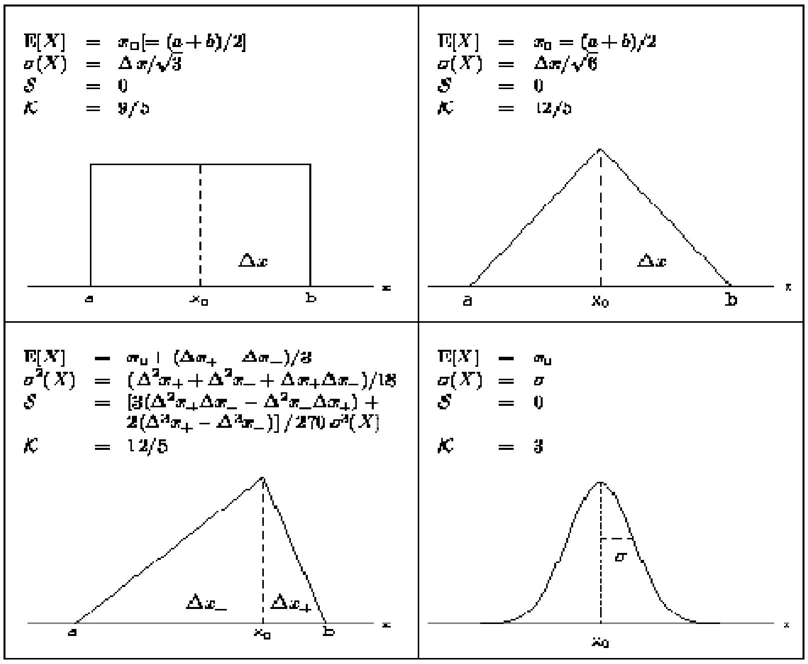


Figura 11.3: Modelli per le incertezze di tipo B.

1. Consideriamo un termometro a mercurio, avente divisioni di $0.1°$C e di cui sappiamo che l'incertezza di calibrazione è pari a $0.6°$C. Consideriamo le seguenti letture: $T_1 = 22.00\,°\mathrm{C}$ e $T_2 = 23.00\,°\mathrm{C}$. Quanto vale la diferenza fra le temperature?

   Per dare il risultato occorre valutare la deviazione standard di ripetibilità, che tiene conto anche dell'errore di lettura. Effettivamente bisognerebbe sapere qualcosa di più sulla misura. Come mero esercizio accademico, assumiamo che la misura sia disagevole, addirittura tale che ci sentiamo "tranquilli" entro una divisione. Ne segue $\sigma_r = 0.03°$C (punto 5 del paragrafo precedente) e quindi:

$$\begin{aligned} \sigma(T_1) = \sigma(T_2) &= 0.03 \oplus 0.6 = \sqrt{0.03^2 + 0.6^2} = 0.6\,°\mathrm{C} \\ T_1 &= 22.0 \pm 0.6\,°\mathrm{C} \\ T_2 &= 23.0 \pm 0.6\,°\mathrm{C} \\ \rho(T_1, T_2) &= 0.998 \\ T_2 - T_1 &= 1.00 \pm 0.04\,°\mathrm{C}\,. \end{aligned}$$

   Dimenticando la correlazione si sarebbe ottenuto $1.0 \pm 0.8\,°\mathrm{C}$, con una incertezza 20 volte maggiore!

2. Usando un voltmetro digitale, applicato in due punti di un circuito, si leggono i seguenti valori: $3.512$ e $3.508$ V. Le misure vengono ripetute più volte e i valori si ripetono esattamente uguali. Le istruzioni del tester affermano che l'errore massimo che il tester può commettere è pari allo $0.2\,\%$. Determinare la differenza di potenziale fra i due punti.

   Chiaramente, l'incertezza su ciascuno dei punti è $0.007$ V ($= 0.002 \times$ $3.5$ V) ma l'errore di calibrazione non può influenzare la differenza fra valori così vicini, specialmente se è stato verificato che, alternando le letture, effettivamente i valori si ripetono. Nella differenza conta allora soltanto l'incertezza di digitalizzazione:

$$\Delta V = 4.0 \pm 0.4\,\mathrm{mV}\,.$$

   (L'incertezza di $0.4$ mV è data da $\sqrt{2 \times 1/12}$.)

3. Si effettuano delle misure dello spessore di tre blocchetti con un calibro Palmer fabbricato secondo le norme DIN 863. Esso ha divisioni di 1/100 di mm e la massima escursione dell'indicazione rispetto al valore vero è di $\pm 2\,\mu$m. Per ogni spessore si eseguono 10 misure, ottenendo i seguenti valori di media e deviazione standard (in mm): $\overline{x}_1 = 0.9832$, $\sigma_1 = 0.0032$, $\overline{x}_2 = 0.9869$, $\sigma_2 = 0.0028$, $\overline{x}_3 = 1.7341$, $\sigma_3 = 0.0041$. Quanto valgono i tre spessori? Valutare anche la differenza del secondo e del terzo rispetto al primo.

   Per ciascuno spessore l'incertezza totale è data dalla combinazione in quadratura dell'incertezza di tipo A ($\sigma_i/\sqrt{10}$) e quella di tipo $B$ ($u = 2\mu\mathrm{m}/\sqrt{3}$). Nelle differenze bisogna tener conto delle eventuali correlazioni. Il tipo di strumento e di misura in oggetto appartengono al caso non "facilmente schematizzabile" discusso nel

© G. D'Agostini 2000

paragrafo 11.2.5. Ragionevoli conclusioni sono:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.9832 \pm 0.0015\,\text{mm} \\ x_2 &= 0.9869 \pm 0.0015\,\text{mm} \\ x_3 &= 1.7341 \pm 0.0017\,\text{mm} \\ x_2 - x_1 &= 3.7 \pm 1.3\,\mu\text{m} \\ x_3 - x_1 &= 0.7509 \pm 0.0023\,\text{mm} \end{aligned}$$

4. Sui dati del problema precedente. Supponiamo che il coefficiente di dilatazione termica del calibro sia $\alpha_c = 1.2^{-5}\,\text{K}^{-1}$ e quello dei blocchetti $\alpha_b = 1.0^{-4}\,\text{K}^{-1}$. Lo sperimentatore purtroppo ha dimenticato di misurare la temperatura, ma, dalla memoria della sensazione fisiologica all'atto della misura, è convinto che essa fosse *"molto probabilmente fra 27 e 28 gradi e quasi sicuramente compresa fra 25 e 30 gradi*. Come verranno forniti i risultati alla temperatura di riferimento di 20 °C?

   I gradi di fiducia sui possibili valori di temperatura possono essere modellizzati con una triangolare o con una gaussiana a 2-3 sigma. Si ha, rispettivamente, nei tre casi: $u_1 = 1.0$ °C, $u_2 = 1.3$ °C e $u_3 = 0.8$ °C. Prendendo il valore intermedio si ottiene:

   $$\Delta T = 7.5 \pm 1.0\,^\circ\text{C}\,.$$

   Applichiamo ora la correzione per la temperatura, ricordando che

   $$l = l_\circ \frac{1+\alpha_b \Delta T}{1+\alpha_c \Delta T}\,.$$

   Invertendo e trascurando i termini di ordine superiore a $\Delta T$ (essendo i coefficienti $\alpha$ molto piccoli):

   $$\begin{aligned} l_\circ &= l\,\frac{1+\alpha_c\Delta T}{1+\alpha_b\Delta T} \\ &\approx l\,(1+\alpha_c\Delta T - \alpha_b\Delta T) = l\,[1-(\alpha_b-\alpha_c)\,\Delta T] \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} \beta &= 1-(\alpha_b-\alpha_c)\,\Delta T = 0.99934 \pm 0.00009 \\ l_1 &= 0.9826 \pm 0.0015\,\text{mm} \\ l_2 &= 0.9862 \pm 0.0015\,\text{mm} \\ l_3 &= 1.7330 \pm 0.0017\,\text{mm} \\ l_2 - l_1 &= 3.6 \pm 1.3\,\mu\text{m} \\ l_3 - l_1 &= 0.7504 \pm 0.0023\,\text{mm} \end{aligned}$$

5. "Pesa più un chilogrammo di piombo o un chilogrammo di polistirolo?" suona come una domanda per ingannare i bambini, ma, opportunamente riformulata, mette in imbarazzo i grandi: "se si pongono su una bilancia di precisione un kg di piombo e un kg di polistirolo, in quale caso si leggerà il valore maggiore?" La risposta è ovviamente "il piombo" in quanto il polistirolo risente molto di più della spinta di Archimede dell'aria (si era assunto che la bilancia non operasse sotto vuoto, ovviamente). Facciamo un esempio: un parallelepipedo di polistirolo ha i lati di $36.3 \pm 0.2$ cm, $37.2 \pm 0.2$ cm e $36.8 \pm 0.2$ cm (incertezze scorrelate).

© G. D'Agostini 2000

| $T$ | $p$ (mbar) | | | $A$ |
|---|---|---|---|---|
| (°C) | 980 | 1000 | 1020 | kg m$^{-3}$ |
| 19 | 1.1690 | 1.1928 | 1.2167 | $-9.87 \cdot 10^{-3}$ |
| 20 | 1.1650 | 1.1887 | 1.2125 | $-10.47 \cdot 10^{-3}$ |
| 21 | 1.1610 | 1.1847 | 1.2084 | $-11.09 \cdot 10^{-3}$ |

Tabella 11.2: Densità dell'aria secca (in kg m$^{-3}$) per alcuni valori di temperatura e pressione. $A$ rappresenta il coefficiente di dipendenza dall'umidità relativa (vedi formula (11.35)).

Esso è posto su una bilancia perfettamente calibrata, posta in una stanza in cui la densità dell'aria vale esattamente $1.1836\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$ (vedremo nel prossimo esercizio quanto questa affermazione sia realistica). Sulla scala digitale si legge 941 g. Determinare massa e densità del polistirolo.

Il volume $V$ vale $(4.97 \pm 0.05) \cdot 10^{-2}\text{m}^3$ e la massa apparente $M_a$ $0.9410 \pm 0.0003\,\text{kg}$, da cui:

$$
\begin{aligned}
M &= M_a + \rho_{aria} V = 999.8 \pm 0.7\,\text{g} \\
\rho_p &= \frac{M}{V} = \rho_{aria} + \frac{M_a}{V} = \rho_{aria} + \rho_a = 20.12 \pm 0.19\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}\,.
\end{aligned}
$$

6. Quanto vale la densità dell'aria? Qualcuno si sarà insospettito dal valore "esatto" di $1.1836\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$, specialmente quando in molti libri di testo si trova $1.293\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$. Questo è un caso di incertezza dovuta ad "inesatta definizione del misurando". Cosè l'"aria"? Il valore di $1.1836\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$ vale per "aria di riferimento"[8] (78.10 % $N_2$; 20.94 % $O_2$; 0.92 % Ar,...) con lo 0.06 % di $CO_2$ (invece dell'usuale valore di riferimento di 0.04 %) alle seguenti condizioni ambientali: temperatura di 20 °C, pressione atmosferica di 1000 mbar e umidità relativa del 50 %. Quanto vale allora l'incertezza sulla densità dell'aria? Essa dipende dall'incertezza sui fattori di influenza.

   Facciamo il seguente caso ($\varphi$ sta per umidità relativa):

$$
\begin{aligned}
x_{CO_2} &= 0.06 \pm 0.02\,\% \\
T &= 20 \pm 1\,^\circ\text{C} \\
p &= 1000 \pm 20\,\text{mbar} \\
\varphi &= 0.50 \pm 0.10\ \ (\text{ovvero } 50 \pm 10\,\%)\,.
\end{aligned}
$$

   Per fare i conti utilizziamo seguente formula:

$$
\rho = (\rho_\circ + \varphi\, A)\,[1 + 0.0041\,(x_{CO_2} - 0.04\,\%)]\,, \qquad (11.35)
$$

   dove $\rho_\circ$ è il valore della densità dell'aria secca, dipendente da temperatura e pressione, e $A$ è un coefficiente che dipende soltanto dalla temperatura (vedi tabella 11.2). Eseguendo le derivate per via numerica (vedi paragrafo 11.2.7) troviamo i seguenti contributi

[8] I valori che seguono, la formula (11.35) e la tabella 11.2 sono presi da F. Kohlrausch, *"Praktische Physik"*, B.G. Teubner Stuttgart 1986. La sezione 72 sulla densità dell'aria è curata da M. Kochsieck dell'istituto tedesco di metrologia di Braunschweig.

all'incertezza totale

$$\begin{aligned} x_{CO_2} &= 0.06 \pm 0.02\,\% &\rightarrow\quad& u_1 = 0.0001\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \\ T &= 20 \pm 1\,^\circ\mathrm{C} &\rightarrow\quad& u_2 = 0.0004\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \\ p &= 1000 \pm 20\,\mathrm{mbar} &\rightarrow\quad& u_3 = 0.0237\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \\ \varphi &= 0.50 \pm 0.10\,\% &\rightarrow\quad& u_4 = 0.0010\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \end{aligned}$$

Si vede quindi come il contributo più importante sia dovuto all'incertezza sulla pressione. Il valore della densità dell'aria con questo stato di conoscenza dei fattori di influenza vale quindi

$$\rho = 1.184 \pm 0.024\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\,.$$

7. Quanto dovrebbe essere il controllo sulle variabili di influenza per poter affermare che la densità dell'aria sia esattamente $1.1836\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$?

   Affermare che $\rho = 1.1836\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ sia esatto vuol dire che il solo errore possibile è quello di arrotondamento. Quindi $u(\rho) \lessapprox 0.0001/\sqrt{12} = 3\cdot 10^{-5}\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Se le quattro incertezze contribuiscono allo stesso modo, ciascuna di esse deve valere al più $u_i \approx 1.5\cdot 10^{-5}\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Ne seguono i seguenti requisiti:

$$\begin{aligned} \sigma(x_{CO_2}) &\lessapprox 0.003\,\% \\ \sigma(T) &\lessapprox 0.04\,^\circ\mathrm{C} \\ \sigma(p) &\lessapprox 0.013\,\mathrm{mbar} \\ \sigma(\varphi) &\lessapprox 0.15\,\%\,, \end{aligned}$$

   condizioni di lavoro tutt'altro che banali! Si capisce allora come, nei casi pratici, non abbia molto senso far riferimento ad una densità dell'aria con più di tre cifre significative.

© G. D'Agostini 2000

## 11.10 Problemi

1. La relazione che lega la variabile $Y$ alla variabile $X$ è $Y = X^3$. La variabile $X$ è distribuita uniformemente fra 1 e 3. Trovare il valore massimo e quello minimo che può assumere $Y$. Quanto vale la probabilità che $Y$ assuma un valore minore di 8? Quanto vale la probabilità che $Y$ assuma una valore maggiore di $(y_{max} + y_{min})/2$

2. Sono stati misurati i lati di un cubo, trovando valori compatibili fra di loro. Il valore vero del lato è compreso al $95\,\%$ nell'intervallo $3.27 \pm 0.08\,cm$.
   a) Trovare l'intervallo di fiducia del volume del cubo, valutando il valore del volume che corrisponde agli estremi dell'intervallo di fiducia del lato.
   b) Cosa si ottiene applicando la propagazione degli errori?

3. Vengono effettuate le misure dei due lati di un rettandolo, ottenendo i risultati $l_1 = (5.253 \pm 0.015)\,cm$ e $l_2 = (12.322 \pm 0.013)\,cm$.
   a) calcolare : la differenza fra i due lati, il perimetro, la diagonale e l'area del rettangolo;
   b) riferendosi al triangolo rettangolo formato dai due lati e dalla diagonale: calcolare la tangente dell'angolo opposto al lato minore;
   c) confrontare le precisioni con le quali erano stati misurati $l_1$ e $l_2$ con quelle ottenute sulle grandezza fisiche calcolate da essi.

4. Sui dati dell'esercizio precedente: supponiamo di sapere che l'incertezza sulla calibrazione dello strumento con cui sono state effettuate le misure introduce una correlazione positiva del $65\,\%$ fra le misure dei due lati. Come cambiano i risultati sulle misure derivate?

5. Rispondere all'ultima domanda dell'esercizio 14 del capitolo precedente utilizzando la propagazione degli errori.

6. Si vuole misurare l'accelerazione di gravità con un pendolo semplice. Sapendo che il periodo può essere misurato con una precisione dello $0.3\,\%$ e che si è interessati a conoscere $g$ con una precisione dell'$1\,\%$ , con quale precisione bisogna misurare la lunghezza? ( Si ricorda che $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.)

7. Sia $Y = (a-b)/(a+b)$, dove $a = 45.23 \pm 0.37$ e $b = 21.55 \pm 0.09$. Per calcolare l'incertezza su $Y$ uno studente effettua i seguenti passaggi: $Y = d/s$, con $d = a - b \pm \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$ e $s = a+b\pm\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$; $r_Y = \sqrt{r_d^2 + r_s^2}$; $\sigma_Y = Y \cdot r_y$.
   Perché tale procedimento è sbagliato?
   Quali sono i due modi corretti per calcolare $\sigma_Y$?

8. L'ufficiale di una nave "esegue il punto", ossia misura la latitudine e la longitudine dove si trova la nave, utilizzando le informazioni di appositi satelliti, ricevute ed elaborate da uno strumento elettronico. Si ottengono i valori di $42^\circ \ldots N$ $12^\circ \ldots\ E$. Sapendo che lo strumento fornisce i valori con un incertezza standard di $0.5"$, trovare le incertezze sulla posizione lungo le lineee Nord-Sud e Ovest-Est. Quanto vale la distanza della nave (o più esattamente dalla posizione dove si trova lo strumento, assumendo che non abbia antenne esterne) e una boa che si trova nella posizione .... (Si ricorda che il raggio della terra vale 3600 $Km$ ( incertezza !! ) e si raccomanda di considerare piana la superficie della terra nell'intorno della nave )

9. ( $\diamondsuit$ ) Vengono effettuate due misure di radioattività con un contatore in due posti diversi della stessa stanza. Si ottengono rispettivamente 1200 e 1050 conteggi al minuto. Al livello di confidenza del $95\,\%$ i due risultati sono da ritenersi uguali o diversi? Assumendo che il valore di radioattività sia lo stesso nei due punti, quanto vale la probabilità che la differenza dei risultati sia da imputare ad una fluttuazione statistica?

10. ( $\diamondsuit$ ) Sono stati misurati i due lati di un rettangolo, ottenendo, $a = 20.1 \pm 0.5\,mm$ e $b = 45.8 \pm 0.5\,mm$. Poiché le misure sono state effettuate con lo stesso strumento, le loro incertezze sono correlate positivamente al $60\,\%$.

    (a) determinare il perimetro, la differenza fra i due lati e l'area del rettangolo;
    (b) determinare il coefficiente di correlazione fra la misura del perimetro e quella dell'area;
    (c) determinare il rapporto fra l'area e il perimetro;
    (d) confrontare il risultato ottenuto al punto precedente con quello che si otterebbe a partire dalle misure dei lati.

    Nei vari passaggi, confrontare il risultato con quanto si otterebbe trascurando i termini di correlazione.

11. ( $\diamondsuit$ ) Sia $Y = (a-b)/(a+b)$, dove $a = (45.23 \pm 0.37)\,cm$ e $(b = 21.55 \pm 0.37)\,cm$. Per calcolare l'incertezza su $Y$ uno studente effettua i seguenti passaggi: $Y = d/s$, con $d = a - b \pm \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$ e

© G. D'Agostini 2000

$s = a + b \pm \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$; $r_Y = \sqrt{r_d^2 + r_s^2}$; $\sigma_Y = Y \cdot r_y$.
Otterrà il risultato corretto?

12. ( $\diamondsuit$ ) Un contatore di radioattività misura in un certo intervallo di tempo 2356 conteggi. Il giorno dopo lo stesso contatore, posto nello stesso luogo e fatto funzionare per lo stesso tempo registra 2012 conteggi. Quanto vale il rapporto fra la seconda e la prima misura?

13. ( $\diamondsuit\diamondsuit$ ) Un rivelatore, di forma rettangolare di lati $a = (1.50 \pm 0.01)\,cm$ e $b = (10.00 \pm 0.01)\,cm$, viene posto ortogonalmente alla direzione di provenienza di un debolissimo fascio di neutroni. Viene attivato per $(100 \pm 1)\,s$ e registra 1152 conteggi.
L'efficienza del rivelatore (indicata con il simbolo $\epsilon$ ed intesa come la probabilità che esso arresti un neutrone e di consequenza produca un conteggio) è stata precedentemente misurata in laboratorio inviando sul rivelatore 1000 neutroni e registrando 950 conteggi.
Quanto vale il flusso di neutroni per $cm^2$ al secondo?
Una seconda misura effettuata contemporaneamente con un altro strumento nello stesso posto fornisce $\phi_2 = (0.840 \pm 0.017)\,neutroni/(cm^2 \cdot s)$. Combinando i due risultati, quanto vale l'intervallo di fiducia al 95 % di confidenza del flusso di neutroni?

14. ( $\diamondsuit$ ) Sui dati del problema precedente: assumendo che l'incertezza assoluta sulla misura del tempo rimanga costante, stimare quanto vale l'incertezza che ci si aspetta su $\phi_1$ se la misura viene effettuata in intervalli di tempo rispettivamente 2, 10 e 100 volte maggiori?
Assumendo di poter misurare $a$ con la stessa precisione di $b$ e di poter effettuare la misura per un intervallo di tempo sufficientemente lungo, quale è il numero minimo di neutroni con cui effettuare una nuova misura di efficienza se si vuole avere una incertezza sulla misura del flusso inferiore allo 0.2 % ?

15. Un rivelatore risponde al passaggio di una particella emettendo una debolissima luminescenza. Una piccola frazione dei fotoni emessi fotoni è raccolta da una guida di luce a fibre ottiche ed è inviata su un "fotocatodo", dal quale per effetto fotoelettrico sono estratti degli elettroni (chiamati in gergo "fotoelettroni") i quali danno poi origine ad un segnale elettrico. Sotto queste condizioni la statistica dei foroelettroni è poissoniana. Supponiamo di avere un apparecchio elettronico in grado di dare un certo segnale se è prodotto almeno un fotoelettrone.
L'efficienza del rivelatore viene studiata inviando sul rivelatore 10000 particelle ben separate in tempo e registrando 9912 segnali in coincidenza. Quanto vale il numero medio di fotoelettroni prodotti dal passaggio di quel tipo di particelle?

16. In un esperimento di diffusione di particelle su un certo bersaglio si conta il numero di particelle rivelate al di sopra del piano orizzontale passante per il centro del bersaglio e il numero di quelle che vanno dall'altra parte. Su 788 particelle inviate contro il bersaglio si ottengono $n_1 = 372$ conteggi sopra e $n_2 = 416$ sotto. Il processo di diffusione che si sta studiando è simmetrico o asimmetrico? ( Si faccia uso della variabile "asimetria" definita come $A = (n1 - n2)/(n1 + n2)$ ).

17. Risolvere lo stesso problema pensando di avere due rivelatori molto piccoli tali da avere ripettivamente $n_1 = 372$ e $n_2 = 416$ conteggi, ma con 100000 particelle inviate contro il bersaglio. Inoltre, quanto vale il rapporto fra $n_1$ e il numero totale di conteggi? Confrontare i risultati con quelli del problema nr. 35.

18. Nel fit delle costanti fondamentali del 1986 si ottengono[9] per carica elettrica elementare e la costante di Plank i seguenti valori: $e = 1.60217733 \cdot 10^{-19}\,C$; $h = 6.6260755 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s$. Le deviazioni standard e la covarianza sono rispettivamente $\sigma(e) = 4.863 \cdot 10^{-26}\,C$, $\sigma(h) = 3.966 \cdot 10^{-40}\,J \cdot s$ e $Cov(e,h) = 1.9232 \cdot 10^{-65}\,C \cdot J \cdot s$. Ricavare il valore della costante di struttura fine $\alpha$ dalla relazione $\alpha = \frac{\mu_\circ c e^2}{2h}$, sapendo che la permeabilità magnetica del vuoto e la velocità della luce nel vuoto valgono rispettivamente $4\pi \cdot 10^{-7}\,N \cdot A$ e $299792458\,m \cdot s^{-1}$ e che esse sono prive di incertezza. Come verranno presentati i valori di $e$, $h$ e $\alpha$?

19. Siamo interessati alla misura delle coordinate di punti che giacciono su uno stesso piano. Supponiamo di disporre di uno strumento che sia in grado di misurare con una incertezza dello 0.1 % la distanza fra ciascuno dei punti e l'origine delle coordinate e di un altro che misuri l'angolo che essi formano rispetto all'asse $x$ con una incertezza di $10'$ di arco. Calcolare i valori delle coordinate $x$ e $y$ con le loro incertezze e la correlazione fra di essi nei seguenti casi: $P_1$: $r = 2\,m, \theta = 0°$; $P_2$: $r = 2\,m, \theta = 90°$; $P_3$: $r = 2\,m, \theta = 45°$.

[9] E.R. Cohen and B.N. Taylor, Rev. Mod. Phys. **59** (1987) 1121.

© G. D'Agostini 2000

20. ( $\diamondsuit$ ) La relazione fra velocità ed energia totale di una particella è:
$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
dove $\beta$ è pari al rapporto fra la velocità della particella e la velocità della luce.
Supponiamo di avere una particella per la quale $mc^2$ vale $938 \cdot 10^6\, eV$ ( un protone ) e di misurarne la velocità mediante il tempo che essa impiega a percorrere una certa distanza. Supponendo inoltre che distanza e tempo vengano misurati con una precisione dello $0.1\,\%$, e che $\beta$ risulti pari a 0.9971, trovare l'intervallo di fiducia dell'energia della particella al 68.3, al 95 e al 99 %.

21. Un ragazzo fa jogging in un parco su un percorso di 5 Km esatti che torna al punto di partenza. Avendo dimenticato l'orologio, usa l'indicazione di un grande orologio digitale posto sopra un cartello pubblicitario e visibile soltanto dal punto di partenza/arrivo. Le indicazioni del display sono rispettivamente 10:52 e 11:17.
A quale velocità media è stato effettuato il persorso? Dare l'incertezza del risultato sia ad una deviazione standard, sia al $68.3\,\%$ utilizzando la distribuzione di probabilità del valore vero del tempo di percorrenza che si ritiene la più corretta.

22. Due rivelatori, distanti $30.000 \pm 0.005$ m, registrano il passaggio di una particella carica agli istanti $t_1 = 53.07\, ns$ e $t_2 = 152.61\, ns$ rispetto ad un certo istante di riferimento ( $1\, ns = 10^{-9}\, s$ ). Sapendo che ciascuno dei rivelatori misura il tempo con un'incertezza di $0.20\, ns$, determinare il rapporto $\beta$ fra la velocità della particella e la velocità della luce ( $c = 299792458\, m/s$ ). Assumendo valida l'ipotesi che la velocità della luce sia la massima raggiungibile, fornire il limite inferiore al $95\,\%$ C.L. e confrontarlo con quello che si otterrebbe senze imporre tale ipotesi.

23. ( $\diamondsuit$ ) Si misurano[10] con un multimetro elettronico i valori di resistenza di un campione di 68 resistori da $100\,\Omega$ nominali e di tolleranza dell'$1\,\%$ provenienti da una stessa "striscia" ( e quindi prodotti in condizioni molto simili ). I risultati sono i seguenti: $\overline{R} = 99.955\,\Omega$, $s = 0.16\,\Omega$, $R_{min} = 99.62\,\Omega$, $R_{max} = 100.31\,\Omega$.
    (a) Come è possibile che la deviazione standard sia molto più piccola della tolleranza? Quale valore si sarebbe ottenuto per una distribuzione di valori uniforme fra i due limiti di incertezza?
    (b) Venti resistenze estratte dal campione vengono connesse in serie ed utilizzate per costruire un partitore di tensione tale da fornire la metà della tensione di una pila campione. Supponendo che il valore di tensione della pila campione sia noto con una precisione dello $0.1\,\%$, quanto vale l'incertezza relativa sulla tensione prelevata dal partitore?

[10]Misura realmente effettuata in data 2/5/93. I 420 resistori da cui è stato estratto il campione sono stati successivamente utilizzati per le esercitazioni di laboratorio.

24. ( $\diamondsuit$ ) La relazione che lega la concentrazione della soluzione da preparare, $C_{new}$, con la concentrazione della soluzione a disposizione, $C_{old}$, e i volumi di pipette ($P_i$) e di palloni tarati ($F_i$, dall'inglese *flask* ) utilizzati in una diluizione a $n$ passi è:
$$C_{new} = C_{old} \cdot \Pi_{i=1}^{n} P_i/F_i.$$
Definiamo il rapporto di concentrazione $C = C_{new}/C_{old}$. Sul mercato si trovano le pipette con i seguenti volumi[11] espressi in $mL$ (fra parentesi le incertezze standard): 1 (0.007), 10 (0.02), 20 (0.03), 25 (0.03); e i palloni con i seguenti volumi: 10 (0.02), 50 (0.05), 100 (0.08), 250 (0.12), 500 (0.20), 1000 (0.30).
    (a) Per ottenere un rapporto di concentrazione di 0.001 è preferibile ( nel senso di minimizzare l'incertezza sulla soluzione ) effettuare:
        - una diluizione ad un passo con una pipetta da $1\, mL$ e un pallone da $1000\, mL$?
        - una diluizione a due passi utilizzando le pipette da 20 e da 25 $mL$ e i palloni da 1000 e da 500 $mL$?
    (b) Per ottenere un rapporto di concentrazione di 0.1 come è preferibile operare?
        - ad un passo con una pipetta da $25\, mL$ e un pallone da $250\, mL$?
        - ad passo con una pipetta da $10\, mL$ e un pallone da $100\, mL$?
        - ad passo con una pipetta da $1\, mL$ e un pallone da $10\, mL$?
        - a due passi utilizzando le pipette da 20 e da 25 $mL$ e i palloni da 100 e da 50 $mL$?

[11]Questo problema è tratto dal lavoro di R.B. Lam e T.L. Isenhour, *"Minimizing relative error in the preparation of standard solutions by judicious choice of volumetric glassware"*, pubblicato su *Anal. Chem* **52** (1980) 1158, in cui gli autori hanno studiato i 250000 modi di effettuare diluizioni a 1, 2 o 3 passi utilizzando strumentazione commerciale standard.

© G. D'Agostini 2000

25. ( $\diamondsuit$ ) Si vuole determinare l'attività specifica di una certa sostanza. Un campione di $(22.0 \pm 0.8)\,g$ viene posto all'interno di un contatore di radioattività. Vengono misurati in 1 minuto 1234 conteggi. In assenza del campione il contatore registra 347 conteggi nello stesso intervallo di tempo ( supporre che l'incertezza sul tempo sia trascurabile ). Calcolare l'attività specifica espressa in conteggi per chilogrammo per secondo.

26. Si vuole determinare la risoluzione temporale di tre contatori a scintillazione $A$, $B$ e $C$. Vengono usati a coppie, in cui un contatore funge da START e l'altro da STOP della misura del tempo. Per ogni configurazione, vengono fatti attraversare da 2000 particelle cariche. La distribuzione dei tempi misurati è pressoché normale e le deviazioni standard ottenute sono le seguenti: con $A$ e $B$, $s = 250\,ps$; con $A$ e $C$, $s = 293\,ps$; con $B$ e $C$, $s = 323\,ps$ ($1ps$ - leggi "picosecondo"- è pari a $10^{-12}\,s$ ).
    Quanto valgono deviazioni standard della risposta temporale di ciascuno dei contatori?

© G. D'Agostini 2000

© G. D'Agostini 2000

# Capitolo 12

# Fit

La prima parte di questo capitolo consiste in esempi di applicazione delle formule ottenute con il metodo dei minimi quadrati. Per comodità le formule necessarie vengono riportate qui, anche se per i dettagli delle derivazioni si rimanda altrove (ad esempio la VI parte delle dispense di probabilità). Comunque, al fine di non far risultare l'argomento scollato dalla trattazione precedente, nel primo paragrafo viene introdotto il problema dal punto di vista generale.

Successivamente viene proposto un metodo grafico che permette di ottenere gli stessi risultati dei fit fatti "automaticamente" mediante le formule di cui sopra. Questo metodo viene illustrato mediante un esempio numerico dettagliato.

Un argomento importante è quello di come valutare le incertezze dovute ad errori sistematici che possono aver inficiato i dati sui quali sono stati fatti i fit. Il problema può essere trattato in modo formale e "automatico" introducendo la matrice di covarianza dei punti osservati (una espressione impropria per dire che "la verosimiglianza dei dati osservati è data da una distribuzione normale multivariata"). Si è preferito invece analizzare alcuni dei errori tipici che si possono presentare nelle misure e mostrare come sia possibile valutare l'incertezza associata ad essi in un modo semplice e sicuramente molto più chiaro ed istruttivo della scatola nera delle formule dei minimi quadrati con matrice di covarianza.

## 12.1 Inferenza sui parametri di una legge

Supponiamo di aver misurato delle coppie di grandezze fisiche, di averne osservato l'andamento su un grafico, di avere ipotizzato il tipo di funzione matematica che lega ascisse e ordinate e di voler determinare i parametri della funzione. Consideriamo il semplice caso di un andamento lineare:

$$\mu_Y = m \cdot \mu_X + c \,, \tag{12.1}$$

ove con $\mu_X$ e $\mu_Y$ sono i valori veri delle grandezze. $m$ e $c$ sono parametri di valore ignoto, ovvero numeri aleatori reali (avremmo dovuto usare le lettere maiuscole, ma, come già fatto precedentemente in altri casi preferiamo usare lo stesso simbolo con il quale tali grandezze vengono usualmente indicate).

Indichiamo con $X_i$ e $Y_i$ la coppia di valori osservabili, dati i parametri $m$, $c$ e il valore vero $\mu_{X_i}$ (il valore vero $\mu_{X_i}$ è univocamente determinato dalla (12.1)), la cui verosimiglianza corrispondente è data, assumendo un modello normale per gli errori, da

$$\begin{aligned} f(x_i, y_i \,|\, \mu_{X_i}, m, c) &= f(x_i \,|\, \mu_{X_i}, m, c) \cdot f(y_i \,|\, \mu_{X_i}, m, c) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\sigma_{X_i}} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu_{X_i})^2}{2\,\sigma^2_{X_i}}\right] \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\sigma_{Y_i}} \exp\left[-\frac{(y_i - m\,\mu_{X_i} - c)^2}{2\,\sigma^2_{Y_i}}\right] \end{aligned} \quad (12.2)$$

La verosimiglianza acquista una forma più semplice quando $\sigma_{X_i} \to 0$. Infatti ciò significa che $\mu_{X_i}$ è, dal punto di vista pratico, univocamente determinata dal valore osservato: $\mu_{X_i} = x_i$. La verosimiglianza si riduce[1] a

$$f(x_i, y_i \,|\, m, c) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\sigma_{Y_i}} \exp\left[-\frac{(y_i - m\,x_i - c)^2}{2\,\sigma^2_{Y_i}}\right]. \quad (12.3)$$

Se abbiamo tante coppie di valori misurati e le condizioni sperimentali sono tali che le possibili fluttuazioni delle ordinate intorno ai loro valori veri sono indipendenti, abbiamo

$$f(\underline{x}, \underline{y} \,|\, m, c) = \Pi_i f(x_i, y_i \,|\, m, c)\,, \quad (12.4)$$

ove con $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sono stati indicati i vettori (n-tuple) contenenti i punti osservati.

Applicando il teorema di Bayes otteniamo finalmente

$$f(m, c \,|\, \underline{x}, \underline{y}) \propto \Pi_i f(x_i, y_i \,|\, m, c) \cdot f_\circ(m, c)\,. \quad (12.5)$$

Assumendo una distribuzione iniziale $f_\circ(m, c)$ uniforme e una distribuzione finale circa normale (bivariata), il problema si riconduce a calcolare il massimo della distribuzione finale, che coincide con il massimo della verosimiglianza. Tale punto di massimo fornisce E$(m)$ ed E$(c)$. In pratica si preferisce massimizzare il logaritmo della verosimiglianza equivalente a *minimizzare* la quantità

$$\sum_i \frac{(y_i - m\,x_i - c)^2}{\sigma^2_{Y_i}}\,,$$

come si può verificare facilmente. Il resto si riduce ad un esercizio di analisi.

Avendo ottenuto E$(m) = m(\underline{x}, \underline{y})$ e E$(c) = c(\underline{x}, \underline{y})$, ove $m()$ e $c()$ sono le funzioni che legano le migliori stime dei parametri ai dati sperimentali, si tratta di valutare $\sigma(m)$, $\sigma(c)$ e $\rho(m, c)$. Essi possono essere calcolati dalla loro definizione applicata ad $f(m, c)$ ottenuta dalla (12.5) dopo opportuna normalizzazione. L'assunzione di approssimazione a normale bivariata di $f(m, c)$

[1] Se si prova a fare i conti con le regole delle matematica elementare si trovano risultati divergenti. In realtà il limite va fatto integrando la funzione per tutti i valori di $\mu_{X_i}$ e quindi fare il limite per $\sigma_{X_i} \to 0$. Chi è familiare con elementi di matematica avanzata riconosce in tale operazione l'uso della $\delta$ di Dirac (vedi anche prossimo paragrafo).

© G. D'Agostini 2000

semplifica i calcoli, in quanto i parametri possono essere ricavati direttamente dalla forma della distribuzione senza eseguire gli integrali necessari per valutare $\sigma(m)$ $\sigma(c)$ e $\rho(m,c)$ (vedi, ad esempio, proprietà della distribuzione normale multivariata nella parte III delle dispense di probabilità).

Il modo più semplice per calcolare questi conti è quello di usare un ragionamento di inversione di probabilità del tipo "cane-cacciatore", che funziona nei limiti che abbiamo più volte indicato (vedi paragrafo 9.6):

- i possibili valori osservati di $Y_i$ possono verificarsi intorno ai valori veri $\mu_{Y_i}$ secondo gaussiane:

$$Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_{Y_i}, \sigma_{Y_i})\,;$$

- i possibili valori di $X_i$ saranno, per le ipotesi fatte sull'assenza di errore su di essi, in corrispondenza dei loro valori veri:

$$X_i = \mu_{X_i}\,;$$

- indichiamo con $\widehat{m}$ e $\widehat{c}$ i possibili valori che si possono ottenere, quando sono calcolati sulle possibili osservazioni utilizzando le funzioni $\widehat{m} = \widehat{m}(\underline{X}, \underline{Y})$ e $\widehat{m} = \widehat{c}(\underline{X}, \underline{Y})$ ottenute con il metodo descritto sopra;

- $\widehat{m}$ e $\widehat{c}$ sono variabili casuali dipendenti dalle variabili casuali $\underline{Y}$ (più le costanti $\underline{X}$) e quindi è possibile calcolarne, mediante le usuali formule di propagazione, varianze e coefficiente di correlazione, che indichiamo con $\sigma(\widehat{m})$, $\sigma(\widehat{c})$ e $\rho(\widehat{m}, \widehat{c})$;

- passando da $\{\widehat{m}, \widehat{c}\}$ a $\{m, c\}$ mediante il solito ragionamento cane-cacciatore, abbiamo, finalmente (sempre assumendo che l'ipotesi di normalità sia soddisfatta):

$$\begin{aligned} m &\sim \mathcal{N}(\widehat{m}, \sigma(\widehat{m})) \\ c &\sim \mathcal{N}(\widehat{c}, \sigma(\widehat{c})) \\ \rho(m,c) &\approx \rho(\widehat{m}, \widehat{c})\,. \end{aligned}$$

## 12.2 ❄ Come tener conto anche di possibili incertezze sulle $X$

Per affrontare il problema dal punto di vista piu' generale possibile, si noti come la (12.2) permette di fare una inferenza su tutte le grandezze incerte (in numero di $n+2$, con $n$ pari al numero di punti sperimentali), ovvero:

$$\begin{aligned} f(\underline{\mu_X}, m, c\,|\,\underline{x}, \underline{y}) &\propto \Pi_i f(x_i, y_i\,|\,\mu_{X_i}, m, c) \cdot f_\circ(\underline{\mu_X}, m, c)\,. \\ f(m, c\,|\,\underline{x}, \underline{y}) &\propto \int f(\underline{\mu_X}, m, c\,|\,\underline{x}, \underline{y})\, d\underline{\mu_X} \end{aligned}$$

Assumendo una distribuzione uniforme $f_\circ(\underline{\mu_X}, m, c)$, abbiamo che

1. se $\sigma_{X_i} \rightarrow 0$ allora le gaussiane che descrivono la probabilità di $X_i$ intorno a $\mu_{X_i}$ diventano delle $\delta(x_i - \mu_{X_i})$ e quindi

$$f(m, c \,|\, \underline{x}, \underline{y}) \quad \propto \quad \Pi_i \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma_{Y_i}} \exp\left[-\frac{(y_i - m\,x_i - c)^2}{2\,\sigma_{Y_i}^2}\right].$$

2. Il caso generale di $\sigma_{X_i} \neq 0$ può essere trattato esattamente nello stesso modo, con la complicazione che l'integrale è un po' più complicato. Il risultato è

$$f(m, c \,|\, \underline{x}, \underline{y}) \quad \propto \quad \Pi_i \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sqrt{\sigma_{Y_i}^2 + m^2\sigma_{X_i}^2}} \exp\left[-\frac{(y_i - m\,x_i - c)^2}{2\,(\sigma_{Y_i}^2 + m^2\sigma_{X_i}^2)}\right],$$

   che si riconduce al caso precedente quando $\sigma_{X_i} \rightarrow 0$. Essenzialmente essa dice che si sostituiscono alle $\sigma_{Y_i}$ delle deviazioni standard effettive ottentue sommando in quadratura quelle delle $Y$ e quelle delle $X$, opportunamente propagate mediante la derivata $\partial Y/\partial X$, che nel caso lineare è esattamente $m$. Ovviamente, in questo caso la soluzione diventa più complicata, ma il problema può essere affrontato per iterazione, calcolando $m$ e $c$ senza tener conto delle $\sigma_{X_i}$ e poi inserendo nelle formule le deviazioni standard effettive calcolate con questo valore di $m$. La convergenza è, in genere talmente rapida, che, se i punti sono già stati graficati, nemmeno vale la pena di fare troppi conti: basta valutare a occhio $m$ dal grafico e usare questo valore nel calcolo delle deviazioni standard effettive.

## 12.3 Formule dei minimi quadrati

Riportiamo direttamente i risultati che si ottengono applicando i ragionamenti descritti nel paragrafo precedente.

### 12.3.1 $\sigma_Y$ nota e costante

Indichiamo con

$$\begin{aligned}
n &: \text{numero di punti sperimentali;} \\
\sigma &: \text{deviazione standard delle } Y; \\
\overline{x} &: \text{media aritmetica dei valori delle ascisse;} \\
\overline{y} &: \textit{idem} \text{ per valori delle ordinate;} \\
\overline{x^2} &: \textit{idem} \text{ per i quadrati;} \\
\overline{x\,y} &: \textit{idem} \text{ per i prodotti;} \\
\text{Var}(x) &= \overline{x^2} - \overline{x}^2; \\
\text{Cov}(x, y) &= \overline{x\,y} - \overline{x}\,\overline{y}.
\end{aligned}$$

Si noti come la Var($x$) non sia legata agli errori delle $X$ (nulli), ma alla distribuzione dei punti sperimentali proiettata sull'asse delle ascisse. Con questo

© G. D'Agostini 2000

formalismo abbiamo quindi:

$$\widehat{m} \equiv \mathrm{E}(m) = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{Var}(x)} \tag{12.6}$$

$$\sigma(m) = \frac{1}{\sqrt{Var(X)}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{12.7}$$

$$\widehat{c} \equiv \mathrm{E}(c) = \overline{y} - \widehat{m} \cdot \overline{x} \tag{12.8}$$

$$\sigma(c) = \sqrt{\overline{x^2}} \cdot \sigma(m) \left( = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(x) + \overline{x}^2}}{\sqrt{\mathrm{Var}(x)}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \tag{12.9}$$

$$\rho(m,c) = -\frac{\overline{x}}{\sqrt{\overline{x^2}}} \left( = \frac{\mathrm{segno}(\overline{x})}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{Var}(x)}{\overline{x}}}} \right). \tag{12.10}$$

Si noti la dipendenza delle incertezze dalla deviazione standard che descrive la distribuzione degli errori sulle $Y_i$, dal numero di punti sperimentali (il solito $1/\sqrt{n}$), dal *braccio di leva* dei punti sperimentali (quantificato da $\sqrt{\mathrm{Var}(x)}$) e, per quanto riguarda l'intercetta, dalla distanza del baricentro dei punti dall'asse $Y$. Il coefficiente di correlazione è pari a zero quando la coordinata $x$ del baricentro dei punti sperimentali è pari a 0, mentre aumenta in modulo quando i punti sono molto distanti. Il suo segno è uguale a quello della coordinata $X$ del baricentro. Si faccia inoltre a non confondere questo il correlazione fra $m$ e $c$ con quello fra $x$ e $y$, ovvero $\rho(x,y)$.

Si noti, inoltre, come l'equazione 12.8 indica che il baricentro dei punti debba appartenere alla retta ottenuta dal fit. Questo rappresenta un modo rapido per verificare che non ci siano errori di calcolo.

### 12.3.2 $\sigma_{Y_i}$ ignote e supposte costanti

Tutte le formule precedenti valgono ancora. La sola differenza consiste nel fatto che $\sigma$ va valutato dagli scarti fra le ascisse dei punti sperimentali e quelle della retta che meglio approssima i punti, ovvero quella in corrispondenza di $\mathrm{E}(m)$ e $\mathrm{E}(c)$. Si è già fatto cenno a questo metodo nel paragrafo 10.5.2. In analogia con la deviazione standard, si calcola la radice quadrata della media dei quadrati degli scarti fra $y_i$ e le funzioni calcolate in $x_i$. Inoltre, come spiegato nel paragrafo 10.5.1, il problema diventa complicato quando il numero di punti sperimentali è piccolo. Con i dovuti caveat espressi in tale paragrafo, il modo usuale e che "va nella direzione giusta" di trattare il problema è di dividere per $n-2$, anziché per $n$, la somma dei quadrati dei residui. Quindi la formula pratica è

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (y_i - \widehat{m}\, x_i - \widehat{c})^2}{n-2}}. \tag{12.11}$$

© G. D'Agostini 2000

### 12.3.3 $\sigma_{Y_i}$ diverse e note a priori

Quando le deviazioni standard che descrivono i possibili errori sulle ordinate sono note, ma diverse fra loro valgono ancora le formule (12.6)-(12.10), con le seguenti variazioni:

- tutte le medie ($\overline{x}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y}$ e $\overline{x\,y}$) sono calcolate come medie pesate con pesi $p_i$ pari gli inversi delle varianze delle $Y_i$:

$$
\begin{aligned}
p_i &= \frac{1}{\sigma^2_{Y_i}} \\
\overline{x} &= \frac{\sum_i p_i\, x_i}{\sum_i p_i} \\
\overline{x^2} &= \frac{\sum_i p_i\, x_i^2}{\sum_i p_i} \\
\overline{y} &= \frac{\sum_i p_i\, y_i}{\sum_i p_i} \\
\overline{x\,y} &= \frac{\sum_i p_i\, x_i\, y_i}{\sum_i p_i}\,;
\end{aligned}
$$

- la combinazione $\sigma^2/n$ che compare nel calcolo delle deviazioni standard dei parametri è sostituita dall'inverso della somma dei pesi:

$$
\frac{\sigma^2}{n} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{\sum_i pi}\,.
$$

## 12.4 Esempi di applicazione delle formule dei fit

### 12.4.1 Incertezze ignote e presupposte uguali

Questo è sicuramente il caso più interessante per le applicazioni di laboratorio. Infatti non sempre è possibile valutare le deviazioni standard associate agli errori casuali ripetendo molte volte le misure a parità di condizioni. Inoltre anche ripetendo le misure si potrebbe non tenere conto di possibili fluttuazioni che dipendono dal valore del misurando (vedi discussione sugli errori sistematici, paragrafo 12.7, primo punto). Come esempio numerico, consideriamo i dati dell'allungamento della molla in funzione della massa applicata (vedi tabella 2.5). Si noti l'assenza, a questo livello, di incertezze associate alle misure. Infatti ogni stima sarebbe arbitraria, come discusso lungamente nei capitoli precedenti. I valori sono stati riportati con tutte le cifre che si riuscivano ad apprezzare sugli strumenti. Si noti come gli studenti abbiano deciso, nonostante le raccomandazioni contrarie, che, date le condizioni di lavoro, fosse difficile effettuare letture al di sotto del millimetro. Vedremo nel seguito se, con il senno del poi, avrebbero dovuto sforzarsi un po' e quali sono le conseguenze sul risultato.

Riportiamo nella tabella 12.1 i dettagli dei calcoli. I simboli $\sum_x$, $\sum_{x^2}$, $\sum_y$,$\sum_{x\,y}$ stanno per le sommatorie di interesse. Si noti come il numero di cifre della tabella non è legato alle regole sulle cifre significative, secondo le

© G. D'Agostini 2000

| | Serie 1 | Serie 2 | Serie 3 | Media |
|---|---|---|---|---|
| $\sum_x$ (kg) | 4.607 | 4.607 | 4.607 | 4.607 |
| $\sum_{x^2}$ (kg$^2$) | 2.914 | 2.914 | 2.914 | 2.914 |
| $\sum_y$ (mm) | 605 | 617 | 619 | 613.67 |
| $\sum_{x\,y}$ (kg·mm) | 406.6 | 413.4 | 414.6 | 411.6 |
| $\overline{x}$ (kg) | 0.5758 | 0.5758 | 0.5758 | 0.5758 |
| $\overline{x^2}$ (kg$^2$) | 0.3642 | 0.3642 | 0.3642 | 0.3642 |
| $\overline{y}$ (mm) | 75.63 | 77.13 | 77.38 | 76.71 |
| $\overline{x\,y}$ (kg·mm) | 50.83 | 51.68 | 51.82 | 51.44 |
| Var($x$) | 0.03262 | 0.03262 | 0.03262 | .03262 |
| Cov($x\,y$) | 7.276 | 7.266 | 7.2663 | 7.269 |
| $m$ (mm/kg) | 223.1 | 222.77 | 222.77 | 222.88 |
| $c$ (mm) | -52.84 | -51.17 | -50.91 | -51.64 |
| $\sigma$ (mm) | 0.659 | 0.319 | 0.569 | 0.290 |
| $\sigma(m)$ (mm/kg) | 1.291 | 0.624 | 1.11 | 0.567 |
| $\sigma(c)$ (mm) | 0.779 | 0.377 | 0.672 | 0.342 |
| $\rho(m,c)$ | -0.954 | -0.954 | -0.954 | -0.954 |

Tabella 12.1: Dettagli del fit dei dati dell'allungamento della molla.

raccomandazioni che durante i conti è meglio portarsi dietro molte cifre (vedi ad esempio nota al paragrafo 5.14). I risultati finali si danno invece secondo le regole. Ad esempio, per la 1.a serie:

$$m = 223.1 \pm 1.3\,\text{mm/kg} \qquad (12.12)$$
$$m = -52.8 \pm 0.8\,\text{mm} \qquad (12.13)$$
$$\rho(m,c) = -0.954\,. \qquad (12.14)$$

Si noti inoltre come il coefficiente di correlazione non sia un optional, ma faccia parte integrante del risultato (vedi anche 12.5 e discussione nel paragrafo 12.8, in particolare punti 8 e 10).

La quarta colonna della tabella è ottenuta utilizzando gli allungamenti medi. Si noti come l'informazione sui parametri che si ottiene mediando le tre serie di misure è approssimativamente uguale (sia come valore che come deviazione standard) a quella combinando direttamente i tre risultati. Ad esempio la media dei tre valori di $m$ è pari a $222.82 \pm 0.26$ mm/kg, contro $222.88 \pm 0.29$ mm/kg ottenuto dagli allungamenti medi.

© G. D'Agostini 2000

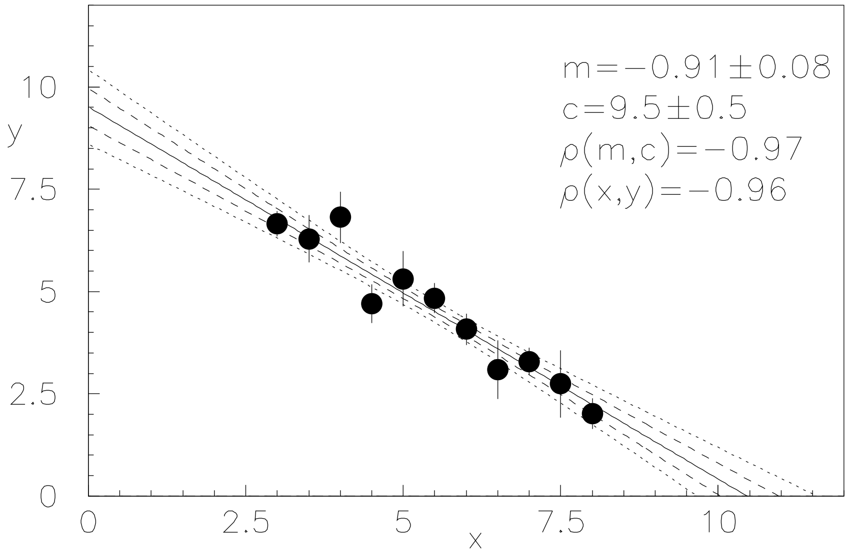


Figura 12.1: Esempi di fit nel caso di errori normali, ma con deviazioni standard diverse da punto a punto. I "dati sperimentali" sono simulati lungo una retta di parametri $m_\circ = -1$ e $c_\circ = 10$.

### 12.4.2 Incertezze note e diverse fra loro

Facciamo anche un esempio di un fit con incertezze sulle ordinate note a priori e diverse una dall'altra. Dati e risultati sono riportati in tabella 12.2. La figura 12.1 mostra i punti della tabella 12.2, con le rispettive barre di incertezza, e la retta ottenuta dal fit (linea continua).

## 12.5 Rette di calibrazione ed estrapolazione

Molto spesso, una volta eseguito un fit su dei punti sperimentali, si è interessati al valore vero di $Y$ che corrisponde ad un dato valore di $X$. Chiaramente la sua migliore stima è data dalla retta che deriva dal fit, in quanto

$$\begin{aligned} \mu_Y &= m\,\mu_X + c \\ \mathrm{E}(\mu_Y) &= \mathrm{E}(m)\,\mu_X + \mathrm{E}(c) = \widehat{m}\,\mu_X + \widehat{c}\,. \end{aligned} \qquad (12.15)$$

L'incertezza su $\mu_Y$ è ottenuta dalla propagazione delle incertezze, tendendo conto (di fondamentale importanza!) del termine di correlazione:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\mu_Y) &= \left(\frac{\partial\mu_Y}{\partial m}\right)^2 \sigma^2(m) + \left(\frac{\partial\mu_Y}{\partial c}\right)^2 \sigma^2(c) \\ &\quad +2\,\frac{\partial\mu_Y}{\partial m}\,\frac{\partial\mu_Y}{\partial m}\rho(m,c)\,\sigma(m)\sigma(c) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{(\mu_X-\overline{x})^2}{\mathrm{Var}(x)}\frac{\sigma^2}{n}\,, \end{aligned} \qquad (12.16)$$

© G. D'Agostini 2000

| $x$ | $y$ | $\sigma_y$ |
|---|---|---|
| 3.00 | 6.66 | 0.32 |
| 3.50 | 6.29 | 0.58 |
| 4.00 | 6.81 | 0.63 |
| 4.50 | 4.70 | 0.47 |
| 5.00 | 5.31 | 0.67 |
| 5.50 | 4.84 | 0.37 |
| 6.00 | 4.08 | 0.38 |
| 6.50 | 3.09 | 0.72 |
| 7.00 | 3.29 | 0.34 |
| 7.50 | 2.74 | 0.83 |
| 8.00 | 2.01 | 0.38 |
| $\sum_p$ | 55.1985 | |
| $\sum_x$ | 302.396 | |
| $\sum_{x^2}$ | 1812.49 | |
| $\sum_y$ | 249.928 | |
| $\sum_{xy}$ | 1227.21 | |
| $\overline{x}$ | 5.47834 | |
| $\overline{x^2}$ | 32.8359 | |
| $\overline{y}$ | 4.52779 | |
| $\overline{x\,y}$ | 22.2327 | |
| Var$(x)$ | 2.82373 | |
| Cov$(x,y)$ | $-2.57208$ | |
| $m$ | $-0.91 \pm 0.08$ | |
| $c$ | $9.5 \pm 0.5$ | |
| $\rho(m,c)$ | $-0.956$ | |

Tabella 12.2: Dati sperimentali simulati lungo una retta avente parametri $m_\circ = -1$ e $c_\circ = 10$.

© G. D'Agostini 2000

ove $\sigma^2/n$ va sostituito nel modo indicato nel paragrafo precedente se le incertezze sono diverse. Le derivate vanno calcolate, come solito in corrispondenza di $\overline{m}$ e $\overline{c}$. I conti vengono lasciati per esercizio.

Si noti l'andamento di $\sigma(\mu_Y)$ in funzione di $\mu_X$. Essa è minima in corrispondenza dei punti sperimentali, in quanto tutte le informazioni contribuiscono a costringere (probabilisticamente) il valore di $\mu_Y$ in un piccolo intervallo intorno alla retta. A mano a a mano che ci allontana dai punti misurati la qualità dell'informazione su $\mu_Y$ si deteriora, come indicato molto chiaramente dalla formula 12.16. . Questo è mostrato in modo eloquente nella figura 12.1, ove le due curve tratteggiate indicano la banda di $\pm 1\,\sigma(\mu_Y)$ intorno alla retta e quelle puntinate la banda di di $\pm 2\,\sigma(\mu_Y)$ (chiaramente le scale di $\mu_X$ e di $X$ coincidono).

Infine, la figura 12.2 mostra infine la qualità della determinazione dei parametri e della determinazione di $\mu_Y$ da $\mu_X$ a seconda di deviazione standard, numero e tipo di configurazione dei punti sperimentali.

## 12.6 Analisi grafica

Vediamo quali sono i passi necessari per un'analisi grafica che, condotta a termine fino in fondo, produce risultati quantitativi in accordo con quelli ottenibili mediante fit con i minimi quadrati. In molte esperienze, comunque, non è necessario procedere ad un'analisi così accurata come quella proposta e ci si può fermare al primo passo.

### 12.6.1 Stima dei parametri

- Si traccia la retta stimata ad occhio, cercando di passare in mezzo a tutti i punti. Questa retta praticamente coincide con quella che si ottiene con i minimi quadrati.

- Si ricavano quindi dal grafico due punti che giacciono sulla retta, che siano ben distanziati e ben leggibili. Da questi si ricavano $m$ e $c$ (l'intercetta si ottiene in genere più agelvomente in modo diretto, come è ben noto).

  Per quanto riguarda le cifre con cui rileggere i valori si noti come i punti della retta sono "più stabili" di quelli delle singole misure e quindi possono essere riletti anche con una cifra in più. Si ottengono quindi $c$ e $m$ con il numero di cifre che seguono dalle solite regolette sulle cifre significative.

### 12.6.2 Stima dell'incertezza sui parametri ripetendo le misure

Il modo più semplice, e che per le prime esperienze è indubbiamente istruttivo, è quello di ripetere più volte la misura e studiare le fluttuazioni dei risultati. Si tenga conto che, non facendo calcoli di "errori massimi" né propagazioni varie, è molto facile ripetere più volte le misure in alcune ore.

© G. D'Agostini 2000

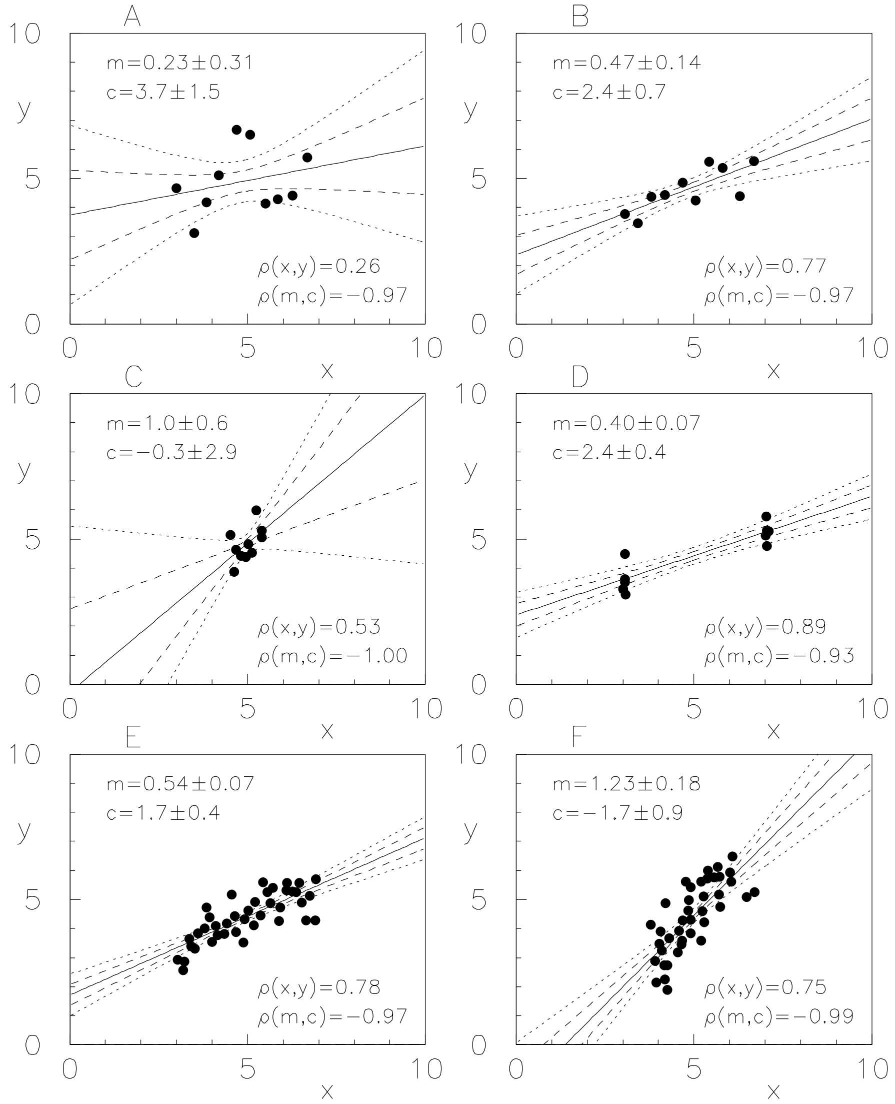


Figura 12.2: Esempi di fit nel caso di incertezze tutte uguali. I 10 punti "sperimentali" dei due grafici in alto (A e B) sono simulati con deviazione normale rispetto alla retta teorica di $m_\circ = 0.5$ e $c_\circ = 2$ e aventi $\sigma$ nei due casi rispettivamente pari a 1.0 e 0.5. I valori di $m$ e $c$ ottenuti dal fit sono riportati direttamente sul grafico. I grafici centrali (C e D) mostrano l'effetto del raggruppamento. Nel grafico a sinistra in basso la $\sigma$ vale 0.5, ma il numero di punti sperimentali è pari a 41. Nell'ultimo grafico gli stessi punti del grafico precedente sono stati ruotati di 30° intorno al loro baricentro al fine di mostrare la non dei risultati invarianza per rotazione.

© G. D'Agostini 2000

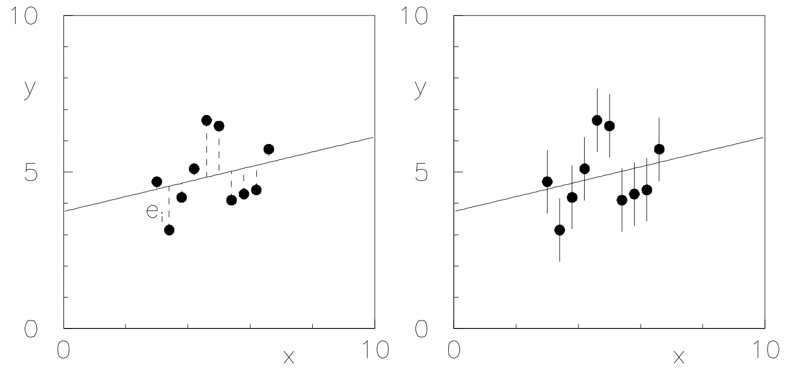


Figura 12.3: Residui e barre di incertezza ($\pm\sigma_r$).

### 12.6.3 Stima dell'incertezza della singola misura dai residui

In realtà non c'è alcun bisogno di ripetere le serie di misure. Se ciascuna serie contiene un numero sufficiente di punti (tipicamente, leggermente superiore al numero di parametri che si vogliono valutare) essa racchiude in sé le informazioni necessarie alla valutazione delle incertezze, o almeno a quelle derivanti da errori casuali, mediante il metodo dei residui. Una volta tracciata la retta si può leggere dal grafico, per ogni punto, il residuo $e_i$, ovvero la differenza fra l'ordinata misurata e il valore della retta in corrispondenza dell'ascissa misurata, come mostrato in figura 12.3. Si ottiene quindi, dalla media dei quadrati dei residui, la stima della deviazione standard delle ordinate, assumendo che sia la stessa per tutti i punti e attribuendo soltanto alle ordinate le deviazioni dal valore vero:

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2}} .$$

Il nome $\sigma_r$ sta a indicare sia che essa è calcolato dai residui sia che rappresenta l'equivalente della deviazione standard di ripetitività delle misure. Il fattore $n-2$ al posto di $n$ ha la stessa giustificazione dell'$n-1$ nella deviazione standard, tenendo conto che ora ci sono due vincoli fra i dati. Ripetiamo ancora una volta quanto detto a proposito di $\sigma_{n-1}$: anche se le ragioni profonde di questa scelta non sono sempre condivisibili, il risultato "va nella direzione giusta". Anche qui, quando $n$ è dell'ordine della decina, la correzione è ininfluente ai fini pratici.

A questo punto, finalmente si conosce l'errore casuale sulle ordinate in condizioni di ripetività (nell'ipotesi che quello sulle ascisse sia trascurabile)!

Ovviamente, si può anche fare l'esercizio opposto e attribuire tutto l'errore alle ascisse (senza dover fare tutti i conti, si può propagare $\sigma_r$ su "$\sigma_{r_x}$" mediante la derivata: $\sigma_{r_x} = \sigma_r/|m|$). È interessante notare che, anche se il punto di vista cambia drasticamente, saranno invarianti le conclusioni sulle grandezze fisiche di interesse, legate a coefficiente angolare e intercetta.

© G. D'Agostini 2000

### 12.6.4 Valutazione semplificata di $\sigma_r$

Spesso non c'è tempo per rileggere tutti i punti della retta e calcolare $\sigma_r$ dalla somma dei quadrati dei residui. Oppure, semplicemente, ci si accontenta di una sua stima al 20-30 %, (sembra tanto, ma anche un'incertezza del 50 % su $\sigma_r$ è più che accettabile per molte applicazioni, specialmente se essa è ottenibile in tempi rapidi). In questi casi si possono tracciare, simmetricamente alla retta di migliore stima, due rette parallele tali che contengano i 2/3 circa dei punti. La distanza, lungo l'asse delle ascisse, fra le due rette è approsimativamente uguale a $\sigma_r$. Analogalmente, si possono considerare la "quasi totalità" dei punti, e considerarlo un intervallo a 2 o a 3 deviazioni standard.

### 12.6.5 Barre di incertezza

Soltanto a questo punto è lecito riportare le barre di incertezza sui punti del grafico. Ogni barretta verticale è centrata sul punto sperimentale ed ha lunghezza $2\,\sigma_r$.

### 12.6.6 Incertezza dei parametri mediante $\sigma_r$ ricavata dai dati

Nota la deviazione standard da attribuire alle singole fluttuazioni delle $y$, si possono usare le formule delle incertezza che si ricavano dal metodo dei minimi quadrati, che qui riportiamo per comodità, riscritte in termini delle grandezze che si conoscono e di quanto altro sia facilmente valutabile per via grafica:

$$\sigma(m) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}(x)}}\,\frac{\sigma_r}{\sqrt{n}} \tag{12.17}$$

$$\sigma(c) = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(x)+\overline{x}^2}{\mathrm{Var}(x)}}\,\frac{\sigma_r}{\sqrt{n}} \tag{12.18}$$

$$\rho(m,c) = -\frac{\overline{x}}{\sqrt{\mathrm{Var}(x)+\overline{x}^2}}\,. \tag{12.19}$$

Si noti che $\mathrm{Var}(x)$ non è legata alle incertezze sulle $X$ (convenzionalmente nulle): essa misura invece la dispersione delle $x$ e la sua radice quadrata è legata al cosiddetto "braccio di leva" dei dati sperimentali. È interessante notare come questo possa essere valutato agevolmente dal grafico se i punti sono circa spaziati lungo l'ascissa (caso tipico delle esercitazioni di laboratorio). Approssimando i punti sperimentali ad una distribuzione uniforme si ottiene infatti[2]

$$\sqrt{\mathrm{Var}(x)} \approx \frac{x_{max}-x_{min}}{\sqrt{12}}\,.$$

[2]Si noti che questa espressione è valida per variabili continue. Per variabili discrete equispaziate fra $x_{min}$ e $x_{max}$, la formula esatta è

$$\frac{x_{max}-x_{min}}{\sqrt{12}}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\,,$$

che tende alla deviazione standard del caso continuo quando $n$ è molto grande. Comunque, già per $n=5$ il fattore correttivo è del 20 % e per $n=10$ è del 10 %.

© G. D'Agostini 2000

Si faccia inoltre attenzione a non confondere il coefficiente di correlazione fra i parametri (indicato con $\rho(m,c)$) con il coefficiente di correlazione fra ascisse e ordinate dei punti sperimentali (indicato con $\rho(x,y)$): la grandezza di interesse ai fini del risultato è $\rho(m,c)$.

### 12.6.7 Analisi nel baricentro

Osservando le formule (12.18) e (12.19) si nota che, se $\overline{x}$ è uguale a zero, il coefficiente di correlazione si annulla e anche l'espressione di $\sigma(c)$ è uguale a $\sigma_r/\sqrt{n}$. Questo suggerisce che per semplificare i conti conviene scegliere l'asse delle ascisse in corrispondenza del baricentro dei punti, ovvero effettuare la trasformazione di variabili

$$x' = x - \overline{x}\,;$$

questo è particolarmente comodo se successivamente si deve utilizzare la retta trovata per delle *estrapolazioni* o, in generale, come *curva di taratura*. Chiaramente si otterrano in questo caso valori $m'$ e $c'$ diversi da $m$ e da $c$ ed è facile dimostrare che $c'$ è uguale al baricentro delle $\overline{y}$.

Se si vuole visualizzare l'incertezza su $m'$ e su $c'$ sarà sufficiente

- tracciare le rette passanti per il baricentro e di pendenze $m' \pm \sigma(m')$;
- disegnare una barra verticale centrata nel baricentro e di semiampiezza $\sigma(c')$.

È possibile passare poi dai parametri nel sistema del centro di massa a quelli nel sistema originale tenendo conto che $m\pm\sigma(m) = m'\pm\sigma(m')$, $c = c' - \overline{x}\,m$ e valutando $\sigma(c)$ e $\rho(m,c)$ dalle (12.18) e (12.19).

## 12.7 Effetto degli errori sistematici

La storia in principio non è ancora finita. Cosa abbiamo dimenticato? In questi casi bisogna ripassarsi rapidamente i primi 9 punti del "decalogo" del paragrafo 8.6 (il punto 10 è l'unico di cui abbiamo tenuto conto, al meglio di quello che si poteva fare).

Consideriamo soltanto l'effetto di errori di calibrazione dello strumento. Vediamo quali sono i possibili contributi all'incertezza[3] Per comodità ci riferiamo alla figura 8.9.

### 12.7.1 Errori sistematici dipendenti dal valore della grandezza

Si tratta del caso d) di figura 8.9. Di questo si è già tenuto conto, implicitamente, quando è stata valutata $\sigma_r$ dai residui. Infatti ogni piccola incertezza di taratura nell'intervallo di scala utilizzato influenza $\sigma_r$, così pure ogni piccola differenza fra le masse dei diversi dischi.

[3] Ovviamente la valutazione di effetti sistematici rimane invariata se i parametri della retta sono valutati con i minimi quadrati anziché con l'analisi grafica.

© G. D'Agostini 2000

### 12.7.2 Errore di zero

- L'errore di zero, sia esso sulle ascisse che sulle ordinate, non ha nessuna influenza sul coefficiente angolare, in quanto esso è valutato come rapporto di diferenze:

$$\sigma(m)|_{z_x} = \sigma(m)|_{z_x} = 0\,.$$

- Un errore di zero sulle ordinate ($\sigma_{z_y}$) si riflette direttamente sul valore dell'intercetta, in quanto tutti i punti potrebbero essere traslati coerentemente verso l'alto o verso il basso. Quindi il contributo a $\sigma(c)$ è

$$\sigma(c)|_{z_y} = \sigma_{z_y}\,.$$

- Un errore di zero sulle ascisse ($\sigma_{z_x}$) causerebbe una traslazione orizzontale di tutti i punti. Quindi esso si riflette sull'intercetta attraverso la pendenza della retta. Ne segue che il contributo a $\sigma(c)$ è (trascurando l'effetto di ordine superiore dovuto all'incertezza sulla pendenza stessa):

$$\sigma(c)|_{z_x} = |m|\sigma_{z_x}\,.$$

Se entrambi i contributi sono presenti, essi vanno considerati in quadratura.

### 12.7.3 Errore di scala

Per capire il comportamento degli errori di scala, sia sulle ascisse che sulle ordinate, consideriamo due punti sulla retta $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, in corrispondenza del primo e dell'ultimo punto sperimentale. Da questi punti è possibile ricavarsi $m$ e $c$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,, \tag{12.20}$$

$$c = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1\,. \tag{12.21}$$

Consideriamo ora i fattori di scala $f_x$ e $f_y$ che, come al solito, riteniamo essere

$$\begin{aligned} f_x &= 1 \pm \sigma_{f_x} \\ f_y &= 1 \pm \sigma_{f_y}\,. \end{aligned}$$

e inseriamoli esplicitamente nelle espressioni di $m$ e di $c$:

$$\begin{aligned} m &= \frac{f_y(y_2 - y_1)}{f_x(x_2 - x_1)} \\ c &= f_y y_1 - \frac{f_y(y_2 - y_1)}{f_x(x_2 - x_1)} f_x x_1 = f_y\left(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1\right)\,. \end{aligned}$$

Ne concludiamo quindi che

© G. D'Agostini 2000

- Il coefficiente angolare risente allo stesso modo dei due fattori di scala:

$$\sigma(m)|_{f_x} = |m|\,\sigma_{f_x} \qquad (12.22)$$
$$\sigma(m)|_{f_y} = |m|\,\sigma_{f_y} \qquad (12.23)$$

- L'errore di scala sulle ascisse è ininfluente sull'intercetta, mentre quello sulle ordinate vi si riflette proporzionalmente:

$$\sigma(c)|_{f_x} = 0 \qquad (12.24)$$
$$\sigma(c)|_{f_y} = |c|\,\sigma_{f_y} \qquad (12.25)$$

Come al solito, i vari contributi si combinano quadraticamente.

### 12.7.4 Deviazione dalla linearità

Eventuali deviazioni dalla linearità degli strumenti si riflettono su una deviazione dalla linearità dell'andamento. Non è possibile dare delle regolette ad hoc. Qualora si notino tali effetti nei punti sperimentali, bisogna cercare di capire se l'effetto è da attribuire a uno dei due strumenti (o a entrambi), oppure è la legge fisica ad essere inadeguata, o si tratta soltanto di una fluttuazione. Si cerca quindi di sostituire o ricalibrare gli strumenti, di apportare correzioni fenomenologicamente giustificate ai dati sperimentali, oppure si utilizza semplicemente la zona nella quale ci sono dei buoni motivi per presupporre che l'andamento sia quello ipotizzato. Un caso macroscopico è quello del grafico dell'allungamento in funzione della massa di figura 6.3: la molla non si allunga affatto al di sotto di una massa critica ($\approx 200\,\mathrm{g}$) e quindi i primi tre punti non vanno considerati nell'analisi.

## 12.8 Esempio numerico di un'analisi grafica

Come esercizio ricaviamoci i parametri dell'andamento dell'allungamento in funzione della massa di figura 6.3.

1. Si traccia la retta che, giudicando a occhio, meglio si adatta fra i punti;
2. Si ricavano due punti sulla retta ben leggibili (quelli cerchiati) e da essi i valori di $m$ e di $c$[4]:

$$\begin{aligned} P_1 &= (0.260\,\mathrm{kg}, 0.51\,\mathrm{cm}) \\ P_2 &= (0.820\,\mathrm{kg}, 13.00\,\mathrm{cm}) \\ m &= \frac{(13.00-0.51)\,10^{-2}\,\mathrm{m}}{(0.820-0.260)\,\mathrm{kg}} = 0.2230\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{kg}}\,. \\ c &= y_1 - m\,x_1 = -0.0530\,\mathrm{m} = -5.30\,\mathrm{cm}\,; \end{aligned}$$

[4]Per quanto riguarda il numero di cifre significative, si noti come ne sia stata aggiunta una in più rispetto alle regolette usuali. Esse verranno aggiustate in seguito alla luce di $\sigma(m)$ e di $\sigma(c)$. Nel caso in cui l'esperienza non preveda un'analisi completa delle incertezze di misura sarebbe stato sufficiente scrivere $m = 0.223\,\mathrm{m\,kg^{-1}}$ e $c = -5.3\,\mathrm{cm}$.

© G. D'Agostini 2000

3. Utilizzando i valori dei poarametri della retta ricavata dal grafico, si calcolano i valori "teorici" dell'allungamento per gli 8 valori di massa. Essi sono, in mm: 13.9; 31.5; 49.1; 66.5; 84.1; 101.8; 119.4; 137.0. Si ottengono quindi i residui dalla differenza fra allungamenti misurati e allungamenti calcolati lungo la retta: 0.1; 0.5; -0.1; -0.5; 0.9; 1.2; -0.4; 0.0. La somma dei loro quadrati è pari a 2.93 mm$^2$, da cui si ricava

$$\sigma_r = 0.70\,\text{mm}\,.$$

   Probabilmente gli studenti avrebbero fatto meglio a non accontentarsi della lettura al millimetro. La deviazione standard ottenuta è infatti compatibile con quella dovuta al solo effetto di arrotondamento al millimetro. Siccome tutte le incertezze che seguiranno saranno proporzionali a $\sigma_r$, sarebbe stato importante leggere al meglio i valori, a costo di "inventarsi i decimi". L'analisi dei residui sfronda poi, in modo automatico, tutte le cifre superflue.

4. Conoscendo $\sigma_r$ si possono finalmente riportare le barre di incertezza sul grafico. Nel caso in considerazione le barre risulterebbero invisibili sulla figura in quanto confrontabili con le dimensioni dei pallini con i quali sono stati indicati i punti stessi.

5. Per calcorare le incertezze serve conoscere anche il braccio di leva e il baricentro della distribuzione delle ascisse. Dal grafico valutiamo:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= 0.576\,\text{kg} \\ \sqrt{\text{Var}(x)} &= \frac{(0.852-0.300)\,\text{kg}}{\sqrt{12}} = 0.159\,\text{kg} \end{aligned}$$

6. Finalmente abbiamo il risultato:

$$\begin{aligned} m &= 0.2230 \pm 0.0016\,\frac{\text{m}}{\text{kg}} \\ c &= -53.0 \pm 0.9\,\text{mm} \ \ (= -0.0530 \pm 0.0009\,\text{m}) \\ \rho(m,c) &= -0.96\,. \end{aligned}$$

   Si noti l'altissima correlazione negativa fra i due parametri: detto alla buona, è un po' come se, invece di aver misurato 2 grandezze (nel senso di 2 grandezze indipendenti), ne avessimo misurate 1.04.

7. Confrontiamo il risultato con quanto ottenuto utilizzando il metodo dei minimi quadrati eseguito, riportando qui i risultati per comodità:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 0.66\,\text{mm} \\ m &= 0.2231 \pm 0.0013\,\frac{\text{m}}{\text{kg}} \\ c &= -52.8 \pm 0.8\,\text{mm} \ \ (= -0.0528 \pm 0.0008\,\text{m}) \\ \rho(m,c) &= -0.95\,. \end{aligned}$$

   L'accordo è più che soddisfacente[5]

[5]Le piccole differenze numeriche sono dovute all'uso della formula approssimata per il braccio di leva. Corretto per il fattore

$$\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} = 1.13$$

(legato alla deviazione standard di una distribuzione uniforme discreta), esso diventa 0.180 kg,

© G. D'Agostini 2000

8. Per mostrare l'importanza del coefficiente di correlazione ci calcoliamo il valore dell'allungamento previsto per una massa di 1.000 kg [6]. Propagando lo stato di incertezza sui parametri della retta sul valore estrapolato, abbiamo:

$$\begin{aligned}\sigma^2(y) &= x^2\sigma^2(m) + \sigma^2(c) + 2\,x\,\rho(m,c)\,\sigma(m)\,\sigma(c) \\ &= 2.56 + 0.81 - 2.76\ \mathrm{mm}^2 = 0.61\ \mathrm{mm}^2 \\ \sigma(y) &= 0.8\mathrm{mm} \\ y &= 170.0 \pm 0.8\ \mathrm{mm}\,.\end{aligned}$$

   Tralasciando il coefficiente di correlazione si sarebbe ottenuto $\sigma(y) = 1.8$ mm.

   Si noti infine come l'effetto dovuto al termine di correlazione sia ancora più importante per valori all'interno della distribuzione dei punti sperimentali, con un massimo nel baricentro.[7] Per una massa di 0.576 kg si prevede un allungamento di $75.4 \pm 0.3$ mm (che diventerebbe $\pm 1.3$ omettendo le correlazioni).

9. Per quanto riguarda infine le incertezze dovute ad errori sistematici dello strumento, si può dire tranquillamente che essi sono trascurabili:

   - le letture degli allungamenti sono state effettuate su un foglio di carta millimetrata solidale con il supporto della molla: deviazioni dell'indicazione dell'ordine di grandezza di 0.7 mm o maggiori sono impensabili;
   - i pesetti sono stati misurati tutti insieme, per sottrazione rispetto alla tara, e quindi qualsiasi loro combinazione ha un'incertezza standard ben inferiore ad una parte su mille; anche un'eventuale incertezza di 1 g, proprio a voler esagerare, sulla massa iniziale ($n = 0$), che si riflette su tutti i valori di massa e va perciò considerata come un errore di zero, produce al più un'incertezza sull'intercetta di 0.2 mm; infine, le eventuali differenze[8] fra un pesetto e l'altro sono già incluse, indirettamente, in $\sigma_r$.

---

da cui ne segue un risultato praticamente identico a quello ottenuto mediante programma:

$$\begin{aligned}m &= 0.2230 \pm 0.0014\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{kg}} \\ c &= -53.0 \pm 0.8\ \mathrm{mm} \\ \rho(m,c) &= -0.95\,.\end{aligned}$$

[6] Si noti come nella propagazione non si debba tener conto di un'eventuale incertezza sulla massa se essa è simile a quella dei pesetti con i quali sono state effettuate le misure, in quanto questo contributo è già compreso in $\sigma_r$.

[7] Come abbiamo già fatto notare, il sistema del baricentro è molto conveniente, in quanto $\rho$ si annulla. L'espressione di $\sigma(y)$ è particolarmente semplice e istruttiva:

$$\sigma^2(y) = \sigma^2(c') + x'^2\sigma^2(m')\,.$$

Si riconosce la combinazione in quadratura dell'incertezza dovuta all'intercetta con quella del coefficiente angolare "proiettata" ad una distanza $|x'|$ dal baricentro.

Siccome $\sigma(y)$ deve essere invariante per traslazioni, antitrasformando da $x'$ a $x$, otteniamo la formula

$$\sigma^2(y) = \frac{\sigma_r^2}{n} + (x-\overline{x})^2\sigma^2(m) = \frac{\sigma_r^2}{n} + \frac{(x-\overline{x})^2}{\mathrm{Var}(x)}\,\frac{\sigma_r^2}{n}\,.$$

Si vede quindi come la previsione sull'ordinata abbia una precisione che è massima in corrispondenza del baricentro dei punti e si deteriora quando ci si allontana dalla regione in cui sono state effettuate le misure.

[8] Naturalmente, per ottenere la massima accuratezza sulla precisione dei parametri sarebbe stato meglio misurare individualmente ciascuno dei pesetti, al fine di ridurre $\sigma_r$, ma a questo livello non ne vale la pena.

© G. D'Agostini 2000

Possono essere molto più importanti altri errori che si comportano come errori sistematici costanti in questa serie di misure, ma che possono cambiare effettuandone un'altra. Possono essere dovuti, ad esempio, al modo di operare di chi ha eseguito le misure o ad un suo errore costante di parallasse. Con il metodo grafico proposto, anche una scelta non ottimale della retta migliore produce variazioni nel risultato (tipicamente trascurabili). Questi effetti possono essere studiati soltanto ripetendo le misure (si ricorda che l'ideale sarebbe di poter fare la misura in condizioni di riproducibilità, ovvero tenendo fissa la definizione del misurando, cambiare tutto il resto).

10. Per concludere, tornando al punto 8, cerchiamo di chiarire, anche con esempi numerici, il significato delle diverse deviazioni standard associate alle ordinate che si incontrano effettuando i fit.

    (a) Abbiamo indicato con $\sigma(y)$ la deviazione standard che quantifica l'incertezza della previsione del valore ("vero") di $Y$, per un dato valore di $X$. Come abbiamo visto, questa incertezza è minima in corrispondenza del baricentro dei punti sperimentali e aumenta quando ci si allontana da esso.

    (b) $\sigma_r$ è dovuta invece alle fluttuazioni attese del singolo valore misurato intorno all'andamento medio dei punti sperimentali. Si sarebbe tentati di dire che essa misura le fluttuazioni dei valori delle $y$ letti avendo fissato $X$, ma in realtà essa tiene conto anche delle piccole fluttuazioni del valore di $Y$ da un valore di $X$ all'altro.

    (c) C'è infine un'ultima deviazione standard, che chiamiamo $\sigma_t(y)$ che tiene conto della combinazione dei due effetti. Essa risponde alla domanda: "che valori di $y$ potrei osservare se facessi l'esperimento fissando il valore di $x$?". L'incertezza sui parametri si riflette sul valore vero di $y$ ed inoltre la singola misura ha un'ulteriore incertezza intorno al valore di $y$ medio. Si può dimostrare che queste due incertezze si combinano, come al solito, quadraticamente:
    $$\sigma_t^2(y) = \sigma^2(y) + \sigma_r^2 \,. \tag{12.26}$$

    Facciamo due esempi:

    $$\begin{aligned} x = 0.576\,\text{kg} \quad &\Rightarrow \quad \sigma_t(y) = 0.74\,\text{mm} \\ x = 1.000\,\text{kg} \quad &\Rightarrow \quad \sigma_t(y) = 1.1\,\text{mm}\,. \end{aligned}$$

## 12.9 Uso e abuso del computer

Quando il problema diventa più complicato del semplice caso lineare che abbiamo mostrato la trattazione quantitativa rigorosa richiede necessariamente l'uso dei minimi quadrati, possibilmente con l'ausilio di programmi al calcolatore. Anche se alcuni dei casi possono essere trattati a mano, essi necessitano di lunghe elaborazioni e quindi, una volta che si sa bene come comportarsi, soltanto una perdita di tempo. Ad un certo punto diventa inevitabile l'uso del computer, tenendo però conto che:

- devono essere sotto controllo le ipotesi di lavoro del programma ed bisogna essere sicuri che esse corrispondano al caso in questione;

- il programma deve fornire l'incertezza standard dei parametri e il coefficiente di correlazione di ogni coppia di essi; sarebbe opportuno che

© G. D'Agostini 2000

esso dia anche la deviazione standard $\sigma_r$ ricavata dai residui, oppure il valore del $\chi^2$ fra curva e punti sperimentali, a seconda che il fit sia stato eseguito con incertezze ignote o note a priori;

- gli eventuali effetti sistematici vanno stimati a parte, ad esempio variando di $\pm 1\,\sigma$ le costanti di calibrazioni e i fattori di influenza, combinando poi in quadratura (se i vari contributi sono indipendenti) le variazioni propagate sui parametri.

© G. D'Agostini 2000

# Soluzioni dei problemi

## Capitolo 3

1. Letture in cm: A) 0.960; B) 2.320; C) 3.805; D) 4.980; E) 5.770; F) 6.880; G) 7.620; H) 8.630; I) 9.460; J) 10.370; K) 0.915; L) 1.900; M)3.170; N) 3.850; O) 4.885; P) 5.755; Q) 7.140; R) 8.350; S) 9.050; T) 9.775. Effetti dovuti a quantizzazioni di stampa potrebbero causare piccoli scarti ($\pm 0.005$ cm) da questi valori che però non alterano la sostanza dell'esercizio.
2. a) 3; b) 5; c) 3; d) 3; e) 1; f) 4; g) 4; h) 5 oppure 1; i) 5; j) 2; k) 7; l) 5 oppure 3; m) 1; n) 6; o) 2.
3. a) 31.0; b) 6; c) 3.15; d) 3.15405; e) $C = 49.61$ cm (il 2 della formula è, come $\pi$, esatto e non il risultato di una misura); f) 0.11; g) 0.862; h) 369; i) 2.69; j) $1.521 \cdot 10^4$; k) $1.91 \cdot 10^6$; l) $1.2 \cdot 10^{10}$; m) $2.9 \cdot 10^{265}$; n) $2.632 \cdot 10^{105}$; o) $7.42 \cdot 10^{-130}$; p) 0.99; q) 3.30; r) 54.755; s) 0.0153 $s^{-1}$; t) 0.05060 $ms^{-1}$;
4. Circa 3˙530˙000 maschi e 3˙320˙000 femmine (diverse stime che differiscano da queste di qualche decina di migliaia di abitanti sono ugualmente compatibili con il diagramma).

## Capitolo 5

1. $$\frac{\sum_i (x_i - \overline{x})}{N} = \frac{\sum_i x_i}{N} - \frac{N \cdot \overline{x}}{N} = 0\,.$$
2. 7; 7; 7.2; 2.6 .
3. 7; 7; 6.1; 3.5 .
4. 7; 6.5; 5.8; 3.4 .
5. 6 e 7 (bimodale); 6, 5.8, 3.3 .
6. i valori di moda, mediana, $\sum x$, $\sum x^2$, $\overline{x}$, $\sigma_N$ e $v$ sono:

   **6 s:** 1; 1; 102; 190; 1.02; 0.93; 0.91 (91 %);

   **12 s:** 2; 2; 219; 663; 2.19; 1.35; 0.62 (62 %);

   **30 s:** 4; 5; 516; 3126; 5.16; 2.15; 0.42 (42 %);
7. 18; 18; 17.8; 4.2; 0.24 (24 %) .
8. 51, 52 e 61 (multimodale); 53; 53.5; 7.5; 0.14 (14 %) .
9. $\overline{x} = 1000000.24$, $\sigma_N = 0.10$ . Perché con la calcolatrice (in genere) non funziona? Utilizzare le proprietà di trasformazione di media e deviazione standard.
10. $\overline{x} = -0.025$ mm; $\sigma_N = 0.098$ mm; il valore 44.76 mm potrebbe avere quindi un errore tipico di 0.1 mm. L'errore medio di -0.025 mm è ben al di sotto delle fluttuazioni della singola lettura (oltre al fatto che esso non è significativamente diverso da 0, come si vedrà).

## Capitolo 6

1. (a) $y = -1.513 \cdot x + 17.05$;
   (b) $y = 1.04 \cdot x^{-2.2}$;
   (c) $y = 8.7e^{-0.71 \cdot x}$;
   (d) $y = 13.2e^{-0.211 \cdot x}$;
   (e) $y = 2.76 \cdot x + 80.5$;
   (f) $y = 7.3 \cdot x^{0.56}$;
   (g) $y = 0.34e^{0.37 \cdot x}$;
   (h) $y = 10.0/x$;
   (i) $y = 3.14/x^2$;
   (j) $y = 10 \ln x$.
2. Media: $\propto$ lineare; $\sigma_N \propto \sqrt{T}$; $v \propto 1/\sqrt{T}$.
3. $a \approx 4.7$ cm/s$^2$; $v_\circ 1.0$ cm/s; $v_f \approx 14.15$ cm/s.
4. $\tau = 8.2$, 12.5 e 26.7 s rispettivamente; $S_p = 20.5$ ml/s, $V_\circ = 40$ ml (scarti dell'ordine di grandezza della cifra meno significativa sono nella norma).

## Capitolo 7

1. ....

## Capitolo 8

1. ....
2. Dall'uguaglianza dei momenti delle forze: $M_x = Sqrt M_1 \times M_2$ (media geometrica).

## Capitolo 10

1. Non corretti: b), g), h) e m).
2. $\leq 7.4\,\%$. ( Che distribuzione di probabilità seguono le misure?)
3. $143 \pm 25$;
   $n = 5$: $143 \pm 49$.
4. $68.3\,\%$ C.L.: $t = (12.9 \pm 0.9)\,s$, ovvero $12.1 \leq t \leq 13.8\,s$;
   $95\,\%$ C.L.: $t = (12.9 \pm 2.3)\,s$, ovvero $10.6 \leq t \leq 15.2\,s$;

© G. D'Agostini 2000

5. $n=1$: $(20.0045 \pm 0.0045)\,g$ ( $\widehat{=}0.022\,\%$);
$n=3$: $(0.8719 \pm 0.0026)\,g$ ( $\widehat{=}0.30\,\%$;
$n=15$: $(0.0153 \pm 0.0012)\,g$ ( $\widehat{=}7.8\,\%$).
La misura più precisa, ovvero quella che ha il più basso errore percentuale, è la prima.

6. Varianze ignote: $n=1$: $(20.0045 \pm ??)\,g$;
$n=3$: $(0.8719 \pm 0.0036)\,g$;
$n=15$: $(0.0153 \pm 0.0011)\,g$.
Se si suppone che la deviazione standard della singola pesata sia la stessa per le tre misure, la migliore stima di essa è ottenuta dal campione di 15 misurazioni ( in realtà si può anche combinare l'informazione del campione di tre misurazioni, pesando le due varianza con il numero di gradi di libertà, ma l'influenza è minima ): $s = 0.0020\,g$. Nella stima degli intervalli di fiducia bisogna considerare una $t$ di Student con $\nu = 14$, in quanto quello che conta non è il numero di dati utilizzati per calcolare la media, ma quello per stimare la deviazione standard:
$n=1$: $(20.0045 \pm 0.0043)\,g$;
$n=3$: $(0.8719 \pm 0.0025)\,g$;
$n=15$: $(0.0153 \pm 0.0011)\,g$.

7. $10.4 \pm 2.8\,cellule/\mu l$ al $95\,\%$ C.L..

8. $\mu(\equiv \lambda) = 65.7 \pm 5.6$ ( e <u>non</u> $66 \pm 10$ !).

9. (a) $95\,\%$ C.L.: $\epsilon = (23.5 \pm 4.4)\,\%$;
$99\,\%$ C.L.: $\epsilon = (23.5 \pm 6.1)\,\%$.
(b) 180·000 persone: praticamente impossibile.
(c) $95\,\%$ C.L.: $\epsilon_1 = (32.3 \pm 9.3)\,\%$;
$\epsilon_1 - \epsilon = 8.8 \pm 10.3$ al $95\,\%$ C.L.. Quale dei due farmaci è migliore?

10. $n > 3.84 \cdot p \cdot (1-p) \cdot 10^4 > 8736 \approx 9000$

11. Al $95\,\%$ C.L. la frazione di incroci che violano la legge di Mendel è minore di $1.5 \cdot 10^{-4}$.
Per ottenere risultati del genere bisogna avere piante omozigote con purezze del $99.995\,\%$ e un simile controllo sull'assenza di fecondazioni spurie dovute ad insetti, vento, etc. I risultati hanno dell'incredibile.

12. $p = 0.747 \pm 0.005$; $r = 2.95 \pm 0.08$.

13.

$$\begin{aligned}
f(\mu\,|\,x=0.75) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}0.20}\exp\frac{(\mu-0.75)^2}{2\cdot 0.20^2}}{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}0.20}\exp\frac{(\mu-0.75)^2}{2\cdot 0.20^2}d\mu} \\
&= 1.12 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}0.20}\exp\frac{(\mu-0.75)^2}{2\cdot 0.20^2} \qquad (-1 \le \mu \le 1) \\
1 - F(0.5) &= 88\,\%\,.
\end{aligned}$$

$\mu > 0.43$ al $95\,\%$ C.L..

14. a) $r_1 = (18.8 \pm 0.8)\,cont/s$;
b) $r_2 = (17.0 \pm 1.0)\,cont/s$;
$r_1 - r_2 = (1.8 \pm 1.3)\,cont/s$. L'intervallo di fiducia della differenza non comprende lo 0. Cosa significa?

15. $171 \pm 45\,particelle/\mu g$ (a seguire la distribuzione di Poisson non è il numero di particelle, bensì il numero di tripletti di particelle).

16.
- $\widehat{p} = 0.1968$; $\widehat{\sigma}(p) = 0.019$, da cui, al $95\,\%$ C.L.: $16.0 \le p \le 23.4$, oppure $19.7 \pm 3.7\,\%$.
- ricaviamoci di nuovo la soluzione attaverso il seguente ragionamento: dal valore di percentuale riportato dal giornale si ricava che il numero di persone che ha dichiarato di votare per il partito A è 86. Questo numero rappresenta la migliore stima del valore aspettato della variabile, da cui segue che la migliore stima di $p$ è 0.1968 ( stiamo andando a ritroso ). La migliore stima della varianza della variabile casuale è $(0.1968) \cdot (1 - 0.1968) \cdot 437 = 69$. Otteniamo quindi 8.3 come migliore stima della sua deviazione standard e quindi la migliore stima della deviazione standard di $p$ è 8.3/437=0.019.
- Come mai in questo caso, nel calcolo dell'intervallo di fiducia, non c'è bisogno di dividere per $\sqrt{n}$?

17.
- $23.5\,\%$ ( e <u>non</u> $15.4\,\%$ ! ).

18.
- $46.7\,\%$.

19.
- $68.3\,\%$.

20.
- Ovviamente la probabilità non è intorno al $9\,\%$, ma molto più grande. Vedi anche i problemi 20 e 25 (*** attenzione alla numerazione ***).

*** soluzione ***

- $17\,\%$.

21.
- (a) Una sola misura da 6400 secondi: $\lambda = 6400 \cdot v$.

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda} &= E[X] = \lambda = 6400 \cdot v \\
\widehat{\sigma}(x) &= \sqrt{\lambda} = 80 \cdot \sqrt{v} \\
\widehat{v} &= \frac{\widehat{\lambda}}{6400} = v \\
\widehat{\sigma}(v) &= \frac{v}{80}
\end{aligned}$$

© G. D'Agostini 2000

(b) 100 misure da 64 secondi $\lambda = 64 \cdot v$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda} &= E[\overline{X}] = \lambda = 64 \cdot v \\
\widehat{\sigma}(\overline{x}) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{100}} = \frac{8 \cdot \sqrt{v}}{10} \\
\widehat{v} &= \widehat{\lambda}/64 = v \\
\widehat{\sigma}(v) &= \frac{\widehat{\sigma}(\overline{x})}{64} = \frac{v}{80}
\end{aligned}$$

L'incertezza di tipo A che si ottiene dai due metodi è esattamente lo stesso e, se così non fosse, significherebbe che uno dei due metodi è errato ( o che lo sono entrambi ). Chiamando con $n_s$ il numero di secondi della misura e $n_m$ il numero di misure l'incertezza atteso sulla grandezza fisica è sempre $v/\sqrt{n_s \cdot n_m}$. Ovviamente il secondo metodo permette di controllare se ci sono eventuali derive con il tempo del valore vero ed è da preferire se lo sperimentatore è in grado di sobbarcarsi i costi aggiuntivi - in senso lato - che il registrare molte misure comporta.

## Capitolo 11

1. $y_{min} = 1$, $y_{max} = 27$; $P(Y \leq 8) = 50\,\%$; $P(Y > 14) = 19.7\,\%$.
2. a) $95\,\%$ C.L.: $32.5 \leq V \leq 37.6\,cm^3$, o $V = 35.0 \pm 2.6$;
   b) idem
3. a) $l_2 - l_1 = (7.069 \pm 0.020)\,cm$;
   $p = (35.150 \pm 0.040)\,cm$;
   $d = (13.395 \pm 0.013)\,cm$;
   $A = (64.73 \pm 0.20)\,cm^2$.

   b) $\tan\theta = 0.4263 \pm 0.0013$;

   c) Le precisioni su $l_1$, $l_2$, $l_2 - l_1$, $p$, $d$, $A$ e $\tan\theta$ sono, espresse in %, rispettivamente 0.29, 0.11, 0.11, 0.097, 0.31 e 0.31.
4. a) $l_2 - l_1 = (7.069 \pm 0.012)\,cm$;
   $p = (35.150 \pm 0.050)\,cm$;
   $d = (13.395 \pm 0.016)\,cm$;
   $A = (64.73 \pm 0.24)\,cm^2$.

   b) $\tan\theta = 0.42631 \pm 0.00023$;

   c) Le precisioni su $l_2 - l_1$, $p$, $d$, $A$ e $\tan\theta$ sono, espresse in %, rispettivamente 0.17, 0.14, 0.12, 0.37 e 0.054.
5. $\sigma(r) = \sigma(p)/(1-p)^2$. $r = 2.95 \pm 0.09$. Praticamente lo stesso risultato.
6. $p_l < 0.8\,\%$.
7. E' lecito passare attraverso variabili intermedie per fare i conti, purché ci si ricordi che queste possono essere correlate. In questo caso $\rho(s,d) = +0.892$. Tenendo conto della correlazione, il calcolo conduce allo stesso risultato che si otterrebbe con la formula generale di propagazione degli errori: $0.3546 \pm 0.0040$.
   In quale caso $\rho(s,d)$ è negativo? Ci si può giustificare intuitivamente il segno?
8. 
   - $\widehat{\lambda}_1 = 1200$, $\widehat{\sigma}_1 = 35$; $\widehat{\lambda}_2 = 1050$, $\widehat{\sigma}_1 = 32$. $\widehat{\Delta} = 150$, $\widehat{\sigma}_\Delta = 47$.
     $58 \leq \Delta \leq 242$ al $95\,\%$ di confidenza. Lo zero non è compreso nell'intervallo[9].
     Considerando la variabile $Z$: $\tilde{Z} = 3.16$. Entrambi i test consigliano di rifiutare l'ipotesi al livello di confidenza prefissato.
   - Per rispondere all'ultima domanda consideriamo separatamente le tre variabili:
     (a) Variabile $Z$: si tratta di valutare la probabilità che la variabile gaussiana standardizzata assuma in modulo valori superiori a quello osservato: $P(|Z| > |\tilde{Z}|)$. Sulle tabelle non è riportato il valore 3.16, mentre $P(|Z| > 3.0) = 0.27\,\%$ e $P(|Z| > 3.5) = 0.05\,\%$. Diciamo quindi che $P(|Z| > 3.16)$ è dell'ordine dell'1-2 per mille.
     (b) Variabile $\Delta$: la distribuzione del valore vero di $\Delta$ è una gaussiana, centrata intorno a 150 e avente una deviazione standard di 47. Si potrebbe pensare di calcolare $P(\Delta \leq 0)$. Il risultato sarebbe allora la metà di quanto ottenuto nel caso precedente. Ciò è dovuto al fatto che noi abbiamo arbitrariamente calcolato $\Delta$ come 1200-1050 e non viceversa. Prendendo in considerazione anche questo caso riotteniamo il fattore 2 mancante[10].
     (c) Variabile $\chi^2$: se assumiamo che i due risultati derivino dallo stesso valore vero incognito la migliore stima di quest'ultimo vale $\widehat{\lambda} = 1125$ [ par. 8.5.3,

[9] I due estremi sono 57 e 243 se si usa il valore di $\sigma_\Delta = 47.4$. La differenza fra i risultati, che va confrontata con l'ampiezza dell'intervallo, è assolutamente trascurabile.

[10] Il test di ipotesi di compatibilità fra i due risultati effettuato mediante il controllo se lo zero è compreso nell'intervallo di fiducia di $\Delta$ è indipendente dal segno di $\Delta$.

© G. D'Agostini 2000

es. 3], da cui

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}^2 &= \frac{(1200-1125)^2}{1125} + \frac{(1050-1125)^2}{1125} \\ &= 10\end{aligned}$$

Da notare come al denominatore compaia entrambe le volte 1125 in quanto migliore stima della varianza teorica[11]. Il numero di gradi di libertà è pari a $\nu = 2-1 = 1$. Si trova quindi sulle tavole la probabilità $P(\chi^2_1 > 10)$. Essa è leggermente superiore a 0.001, in accordo con gli altri due metodi.

9. • (a)

$$\begin{aligned}p &= 2(a+b)\,; \\ \sigma_p^2 &= 4\sigma_a^2 + 4\sigma_b^2 + 2\cdot 4\cdot \rho\cdot\sigma_a\sigma_b\,,\end{aligned}$$

ovvero $p = 131.8 \pm 1.8\,mm$ ($\pm 1.4\,mm$ trascurando $\rho_{ab}$).

$$\begin{aligned}A &= a\cdot b\,; \\ \frac{\sigma_A^2}{A} &= \frac{\sigma_a^2}{a} + \frac{\sigma_b^2}{b} + 2\cdot\rho\cdot\frac{\sigma_a}{a}\cdot\frac{\sigma_b}{b}\,,\end{aligned}$$

ovvero $A = 921 \pm 30\,mm^2$ ($\pm 25\,mm^2$ trascurando $\rho_{ab}$)
La differenza vale $d = b - a = 25.7 \pm 0.4\,mm$ ($\pm 0.7\,mm$ trascurando $\rho_{ab}$)

(b)

$$Cov(p,A) = 2b\sigma^2 a + 2a\sigma_b^2 + (2a+2b)\rho_{ab} sigma_a\sigma_b = 52.7 mm^3\,,$$

da cui $\rho_{p,A} = 57.7/(1.8\cdot 30) = 0.98$.

(c)

$$\begin{aligned}r &= \frac{A}{p}\,; \\ \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_p}{p}\right)^2 - 2\rho_{p,A}\left(\frac{\sigma_p}{p}\right)\left(\frac{\sigma_A}{A}\right)\,,\end{aligned}$$

da cui $r = 6.99 \pm 0.14$ ($\pm 0.25$ trascurando $\rho_{p,A}$).

(d)

$$\begin{aligned}r &= \frac{ab}{a+b}\,, \\ \sigma_r^2 &= \left(\frac{b^2}{2(a+b)^2}\right)^2\sigma_a^2 + \left(\frac{a^2}{2(a+b)^2}\right)^2\sigma_b^2 + \frac{a^2b^2}{2(a+b)^4}\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b\end{aligned}$$

riottendendo da cui $r = 6.99 \pm 0.14$ ($\pm 0.12$ trascurando $\rho_{a,b}$).

10. • $Cov(s,d) = \sigma_a^2 - \sigma_b^2 = 0$. Quindi il procedimento fornisce lo stesso risultato di quello corretto.

11. • $c_1 = 2356 \pm 49$, $c_2 = 2012 \pm 45$.
$(\sigma(r)/r)^2 = (\sigma(c_1)/c_1)^2 + (\sigma(c_2)/c_2)^2 = 1/c_1 + 1/c_2$;
$r = 0.854 \pm 0.026$ .

12. • $n_c = 1152 \pm 34$; $\epsilon = 0.950 \pm 0.007$;

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{n_c}{a\cdot b\cdot t\cdot\epsilon} \\ \left(\frac{\sigma_\phi}{\phi}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_{n_c}}{n_c}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\epsilon}{\epsilon}\right)^2\end{aligned}$$

• Elenchiamo le varie incertezze percentuali e il risultato finale:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{n_c}}{n_c} &= 3.0\cdot 10^{-2} = 3.0\,\% \\ \frac{\sigma_a}{a} &= 6.7\cdot 10^{-3} = 0.67\,\% \\ \frac{\sigma_b}{b} &= 1.0\cdot 10^{-3} = 0.10\,\% \\ \frac{\sigma_t}{t} &= 1.0\cdot 10^{-2} = 1.0\,\% \\ \frac{\sigma_\epsilon}{\epsilon} &= 7.4\cdot 10^{-3} = 0.74\,\% \\ \frac{\sigma_\phi}{\phi} &= 3.3\cdot 10^{-2} = 3.3\,\% \\ \phi &= 0.808 \pm 0.027\,\frac{neutroni}{cm^2 s}\end{aligned}$$

• I risultati sono compatibili ( $\phi_2 - \phi_1 = 32 \pm 32\,\frac{neutroni}{cm^2\cdot s}$ ).
La media pesata dei due risultati è

$$\phi = 0.831 \pm 0.014\,\frac{neutroni}{cm^2\cdot s}.$$

e l'intervallo di fiducia al 95 % è

$$0.804 \le \phi \le 0.858\,\frac{neutroni}{cm^2\cdot s}.$$

13. • La somma quadratica dei contributi all'incertezza relativo che non dipendono dal tempo è pari al 1.0 %. L'incertezza percentuale sul tempo va come $1/t$, mentre quello sul numero di conteggi va come $1/\sqrt{t}$. L'incertezza percentuale su $\phi$ diventa rispettivamente 2.4 %, 1.4 % e 1.0 %. Mentre decuplicare la prima volta il tempo di misura è servito ad diminuire l'incertezza di un

[11] Da notare come nella (12.24) delle dispense al denominatore ci sia per ogni $i$ una sua $\sigma_i$. Esso rappresenta il caso più generale in cui ciascuna delle $x_i$ fluttua dal valore vero con una propria $\sigma_i$ di cui la deviazione standard empirica è la migliore stima. Nelle misure di conteggio, con ipotesi che il valore medio sia comune, la migliore stima di $\lambda$ determina anche la migliore stima di $\sigma$.

© G. D'Agostini 2000

fattore 2, decuplicarlo una seconda volta lo ha ridotto soltanto del 30 % ed andare oltre non serve più a niente.

- Se anche $a$ è misurato allo $0.1\,\%$ e $t \to \infty$, la somma quadratica di tutti i contributi all'incertezza relativa ( ad esclusione di quella dovuto all'incertezza sull'efficienza ), è pari a $0.14\,\%$. Si richiede quindi che anche $\sigma_\epsilon/\epsilon$ sia pari allo $0.14\,\%$, ovvero 5.3 volte più piccolo di quello attuale. Si dovrà misurare $\epsilon$ inviando sul rivelatore $\approx 28000$ neutroni.

14.
- $\widehat{P}(0) = 88/10000 = 0.0088$;
  $\widehat{\sigma} = \sqrt{0.088 \cdot (1-0.088)}/\sqrt{10000} = 9.3 \cdot 10^{-4}$
  $P(0) = (8.8 \pm 0.9) \cdot 10^{-3}$;
  $\lambda = -\ln P(0) = 4.73 \pm 0.11$. Da notare come la precisione su $\lambda$ sia maggiore di quella su $P(0)$; come mai?

15.
- Chiamando $x = n_1$ e $n = n_1 + n_2$ si ottiene $p = 0.472 \pm 0.018$ ($1\,\sigma$), ovvero l'intervallo di fiducia al $95\,\%$ è $0.437 \le p \le 0.507$. Entro le incertezze il processo è simmetrico.
- usiamo ora la variabile "asimmetria" e calcoliamo l'incertezza in due modi diversi. Chiamiamo $n$ il numero totale di eventi, $f_1 = n_1/n$ e $f_2 = n_2/n$ le frequenze relative[12].

(a)

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} = \frac{2n_1}{n} - 1 = 2f_1 - 1 \\
\sigma^2(A) &= 4\sigma^2(f_1) = 4 \cdot \frac{f_1 \cdot (1-f_1)}{n} \\
\sigma(A) &= 2\sqrt{\frac{f_1 \cdot (1-f_1)}{n}} = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n}}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} = f_1 - f_2 \\
\sigma(f_1) &= \sqrt{\frac{f_1 \cdot (1-f_1)}{n}} \\
\sigma(f_2) &= \sqrt{\frac{f_2 \cdot (1-f_2)}{n}} = \sigma(f_1)
\end{aligned}
$$

Il fatto che le deviazioni standard siano uguali deriva chiaramente dalla simmetria fra $p$ e $q$ nella distribuzione binomiale. $f_1$ e $f_2$ non sono indipendenti, anzi esse sono anticorrelate al $100\,\%$: $\rho(f_1, f_2) = -1$. Segue allora:

$$
\begin{aligned}
Cov(f_1, f_2) &= -\frac{f_1 \cdot (1-f_1)}{n} \\
\sigma^2(A) &= \sigma^2(f_1) + \sigma^2(f_2) - \left(-\frac{f_1 \cdot (1-f_1)}{n}\right. \\
&= \frac{4 \cdot f_1 \cdot (1-f_1)}{n} \\
\sigma(A) &= 2\sqrt{\frac{f_1 \cdot (1-f_1)}{n}} = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{n1 \cdot n_2}{n}}
\end{aligned}
$$

Entrambi i metodi portano allo stesso risultato. Si ottiene quindi $A = -0.056 \pm 0.036$ ( $1\,\sigma$ ), da cui l'intervallo di fiducia al $95\,\%$ C.L. $-0.126 \le A \le 0.014$.

- Sia lo studio del parametro $p$ della binomiale che quello della variabile $A$ portano alla conclusione che la asimmetria osservata non è statisticamente significativa.

16.
- 

$$
\begin{aligned}
\sigma^2(A) &= \left(\frac{2n_2}{(n_1+n_2)^2}\right)^2 \cdot n_1 + \left(\frac{2n_1}{(n_1+n_2)^2}\right)^2 \cdot n_2 \\
\sigma(A) &= \frac{2}{n}\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n}} \\
A &= -0.056 \pm 0.36\,.
\end{aligned}
$$

Come mai viene lo steso risultato?

17.
- 

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma(e)}{e} &= 3.035 \cdot 10^{-7} \\
\frac{\sigma(h)}{h} &= 5.985 \cdot 10^{-7} \\
\frac{Cov(e,h)}{eh} &= 1.8116 \cdot 10^{-13} \\
\rho(e,h) &= 0.9972
\end{aligned}
$$

$$
\alpha = 7.29735307 \cdot 10^{-3} = (137.0359898)^{-1}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma^2(\alpha)}{\alpha^2} &= 4\frac{\sigma^2(e)}{e^2} + \frac{\sigma^2(h)}{h^2} - 4\frac{Cov(e,h)}{eh} \\
&= 3.684 \cdot 10^{-13} + 3.582 \cdot 10^{-13} - 7.246 \cdot 10 \\
&= 0.020 \cdot 10^{-13} \\
\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} &= 4.5 \cdot 10^{-8}
\end{aligned}
$$

Ignorando il termine di correlazione si sarebbe sovrastimata $\sigma(\alpha)$ di un fattore 10.

[12]rispetto alla soluzione precedente $f_1$ corrisponde al parametro $p$ della binomiale e $f_2$ a $q$

© G. D'Agostini 2000

- I risultati[13] possono essere presentati nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
e &= (1.60217733 \pm 0.00000049) \cdot 10^{-19}\, C \\
h &= (6.6260755 \pm 0.0000040) \cdot 10^{-34}\, J \cdot s \\
\alpha^{-1} &= 137.0359898 \pm 0.0000061
\end{aligned}
$$

oppure

$$
\begin{aligned}
e &= 1.60217733(49) \cdot 10^{-19}\, C \\
h &= 6.6260755(40) \cdot 10^{-34}\, J \cdot s \\
\alpha^{-1} &= 137.0359898(61)
\end{aligned}
$$

L'incertezza relativa, per misure molto precise, è espresso in parti per milione (ppm). Quindi le precisioni con cui le grandezze fondamentali $e$, $h$ e $\alpha$ sono state ottenute dal fit del 1986 sono di 0.30, 0.60 e 0.045 ppm.

18. •

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2(x) &= \cos^2\theta \cdot \sigma^2(r) + r^2 \sin^2\theta \cdot \sigma^2(\theta) \\
\sigma^2(y) &= \sin^2\theta \cdot \sigma^2(r) + r^2 \cos^2\theta \cdot \sigma^2(\theta) \\
Cov(x,y) &= \sin\theta \cdot \cos\theta \left[\sigma^2(r) - r^2 \cdot \sigma^2(\theta)\right]
\end{aligned}
$$

E' da notare come per 0° e per 90° la covarianza si annulla, come si può capire osservando che, per esempio, a 0° l'incertezza su $x$ è determinata da quella su $r$, mentre l'incertezza su $y$ dipende da quella sulla misura dell'angolo ( e dal valore di $r$ ); a 90° si scambiano i ruoli. La covarianza si annulla inoltre identicamemte per qualsiasi valore di $\theta$ se l'incertezza sulle coordinate dovuta a $\sigma(r)$ uguaglia quella dovuta a $\sigma(\theta)$.

- $\sigma(\theta) = 2.9 \cdot 10^{-3}\, rad$; $\sigma(r) = 0.2\, cm$. I risultati sono riportati nella seguente tabella:

| $\theta$ | $x$ $(cm)$ | $\sigma(x)$ $(cm)$ | $y$ $(cm)$ | $\sigma(y)$ $(cm)$ | $Cov(x,y)$ $(cm^2)$ | $\rho(x,y)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0.0 | 0.6 | 200.0 | 0.2 | 0 | 0 |
| 45° | 141.4 | 0.4 | 141.0 | 0.4 | -0.15 | -0.93 |
| 90° | 200.0 | 0.2 | 0.0 | 0.6 | 0 | 0 |

19. • La migliore stima di $E$ è pari a $12.3 \cdot 10^9\, eV = 12.3\, GeV$. Nel seguito tutte le energie verranno espresse in $GeV$. Dalla propagazione delle incertezze relative otteniamo che l''incertezza su $\beta$ è dello $0.14\,\%$, cioè $\beta = 0.9971 \pm 0.0014$.

- Calcoliamo $\sigma(E)$ dalla propagazione delle incertezze:

$$\sigma(E) = \frac{2\beta mc^2}{(1-\beta^2)^{3/2}}\sigma(\beta) = 5.9\, GeV\,.$$

Utilizzando questa deviazione standard otteniamo che al $68.3\,\%$ $6.4 \le E \le 18.2$; al $95\,\%$ $0.7 \le E \le 23.9$; $99\,\%$ $0 \le E \le 27.5$. L'ultimo estremo inferiore è stato posto a 0 in quanto $12.3 - 2.58 \cdot 5.9$ è negativo. Esso è chiaramente assurdo, nel senso che è in contraddizione con il valore misurato di $\beta$, e addirittura con il valore dell'energia corrispondente alla massa a riposo ( $mc^2$ ) della particella .

- Calcoliamo invece gli estremi degli intervalli di fiducia di $E$ dagli estremi degli intervalli di fiducia di $\beta$: al $68.3\,\%$ $10.1 \le E \le 17.1$; al $95\,\%$ $8.8 \le E \le 52.4$; al $99\,\%$ $8.2 \le E < \infty$;
- La differenza fra i due risultati deriva dal fatto che la relazione fra $\beta$ ed $E$ non è sufficientemente lineare nell'intervallo di $\beta$ considerato e quindi la propagazione delle incertezze non è applicabile. I risultati ottenuti con il secondo metodo sono quelli giusti.

20. • La distribuzione del tempo di partenza è uniforme:
$10:52 < t_p < 10:53$, $11:17 < t_a < 11:18$. $T = 1500\, s$, $\sigma(T) = 24\, s$.
$v = 3.333 \pm 0.054\, m/s$ al $68.3\,\%$ C.L. usando $\sigma(T)$.
La distribuzione della differenza dei tempi, come una somma di distribuzioni uniformi è triangolare ( vedere gli esempi a proposito del limite centrale [ par. 6.3 ], con valore medio $1500\, s$ e valori estremi pari a 1440 e $1560\, s$. Dalla condiziona di normalizzazione risulta che l'altezza del triangolo è pari a $1/60\, s^{-1}$. Con semplici argomentazioni geometriche si trova che il $68.3\,\%$ dell'area è nell'intervallo $T = 1500 \pm 26$. Calcolando i valori dalori di $v$ in corrispondenza di questi limiti si trova:

$$v = 3.333^{+0.060}_{-0.057}\, m/s\,.$$

[13]Per l'esattezza, il valore di $\alpha^{-1}$ riportato da Cohen e Taylor è leggermente diverso: 137.0359895(61). Ci sono evidentemente piccoli problemi di arrotondamento. Se si esegue il conto con un calcolatorino scientifico a 10 cifre il risultato è 137.0359908 (61)!

© G. D'Agostini 2000

Essenzialmente, il conto esatto e quello ottenuto con la propagazione delle varianze forniscono lo stesso risultato già in questo caso ancora lontano dall'approssimazione normale delle distribuzioni dei valori veri. Bisogna essere più prudenti se si è interessati a livelli di confidenza più elevati, dove le code delle distribuzioni diventano cruciali nel calcolo.

21. • $T = 99.54 \pm 0.28\, ns$, da cui $v = 30.139 \pm 0.085\, cm/ns$, ovvero $\beta = 1.0053 \pm 0.0028$, da cui risulterebbe che al 95 % C.L. $\beta > 1.0007$, cioè si tratterebbe di un *tachione* ( ipotetica particella con velocità maggiore di quella della luce ).
Se invece si assume valida la teoria della relatività ristretta il massimo valore di $\beta$ vale 1. Quindi si ottiene la distribuzione del valore vero di $\beta$ a partire da quello misurato utilizzando il teorema di Bayes [ par. 9.2, 9.3 ] con $f_\circ(\beta) = k$, con $\beta \leq 1$ ( vedi anche il problema nr. ** sulla massa del neutrino ):

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 0.0028} e^{\frac{(\beta-1.0053)^2}{2\cdot 0.0028^2}} \cdot k}{\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 0.0028} e^{\frac{(\beta-1.0053)^2}{2\cdot 0.0028^2}} \cdot k d\beta} \\ &= \frac{1}{0.0290} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 0.0028} e^{\frac{(\beta-1.0053)^2}{2\cdot 0.0028^2}} \qquad (0 \leq \beta \leq 1) \\ F(\beta = 1) &= 1 \\ F(\beta_\circ = 0.9970) &= 0.05. \end{aligned}$$

Quindi al 95 % C.L. $\beta > 0.9970$.

22. • (a) La tolleranza ha un significato di errore massimo. Nel caso in esame il costruttore garantisce che (praticamente) tutti i resistori abbiano un valore di resistenza compreso fra 99 e 101 $\Omega$, non soltanto all'uscita dalla fabbrica ( quindi tenendo conto delle diverse macchine, materie prime e condizioni di lavoro ) ma anche dopo molto tempo, in certi intervalli di temperature e di umidità, e dopo essere stati sottoposti a saldature. Una striscia di resistori ha pertanto variabilità intorno al valore medio del campione molto più piccola dei limiti di tolleranza. Se i valori di resistenza avessero avuto una distribuzione uniforme[14] si sarebbe ottenuto una deviazione standard di $0.58\,\Omega$.

(b) Chiamiamo $R_1$ e $R_2$ le serie di 10 resistori e consideriamo la differenza di potenziale ai capi di $R_2$:

$$V_{out} = V_{in} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = V_{in} \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = V_{in} \cdot \pi,$$

dove abbiamo indicato con $\pi$ il rapporto $R_2/(R_1 + R_2)$. Dalla propagazione delle incertezze: $R_1 = R_2 = 999.55 \pm 0.51\Omega$ ( $\pm 0.05$ % ); $R_1/R_2 = 1.00000 \pm 0.00072$; $\pi = 0.50000 \pm 0.00036$ ( 0.072 %).
L'incertezza relativa della tensione ai capi di $R_2$, dominata dall'incertezza su $V_{in}$, è pari all'1.2 per mille.

23. • (a) rapporto di concentrazione di 0.001: il secondo procedimento è da preferire in quanto fornisce una precisione dello 0.2 %, contro lo 0.7 % del primo;

(b) rapporto di concentrazione di 0.1: il primo procedimento è il più preciso ( 0.13 % ). Seguono il secondo ( 0.22 % ) e il quarto ( 0.23 % ). Il meno preciso è il terzo con lo 0.73 %.

24. • $a = (6.72 \pm 0.39) \cdot 10^{-4}\, cont \cdot g^{-1} \cdot s^{-1}$.

25. •

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 + \sigma_B^2 &= (62.5 \pm 2.0) \cdot 10^3\, ps^2 \\ \sigma_A^2 + \sigma_C^2 &= (87.0 \pm 2.8) \cdot 10^3\, ps^2 \\ \sigma_B^2 + \sigma_C^2 &= (104.3 \pm 3.3) \cdot 10^3\, ps^2\,, \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= (22.6 \pm 4.8) \cdot 10^3\, ps \\ \sigma_B^2 &= (39.9 \pm 4.8) \cdot 10^3\, ps \\ \sigma_C^2 &= (64.4 \pm 4.8) \cdot 10^3\, ps \\ \sigma_A &= (150 \pm 16)\, ps \\ \sigma_B &= (200 \pm 12)\, ps \\ \sigma_C &= (254 \pm 9)\, ps \end{aligned}$$

## Capitolo 12

1. ....

[14] Ricordiamo che in mancanza di accertamenti questa è la distribuzione da utilizzare [ vedi nota a pag. 136 ].

© G. D'Agostini 2000

© G. D'Agostini 2000