1. se $\sigma_{X_i} \to 0$ allora le gaussiane che descrivono la probabilità di X_i intorno a μ_{X_i} diventano delle $\delta(x_i - \mu_{X_i})$ e quindi

$$f(m, c\,|\,\underline{x}, \underline{y}) \quad \propto \quad \Pi_i \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma_{Y_i}} \exp\left[-\frac{(y_i - m\,x_i - c)^2}{2\,\sigma_{Y_i}^2}\right].$$

2. Il caso generale di $\sigma_{X_i} \neq 0$ può essere trattato esattamente nello stesso modo, con la complicazione che l'integrale è un po' più complicato. Il risultato è

$$f(m, c\,|\,\underline{x}, \underline{y}) \quad \propto \quad \Pi_i \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sqrt{\sigma_{Y_i}^2 + m^2\sigma_{X_i}^2}} \exp\left[-\frac{(y_i - m\,x_i - c)^2}{2\,(\sigma_{Y_i}^2 + m^2\sigma_{X_i}^2)}\right],$$

che si riconduce al caso precedente quando $\sigma_{X_i} \to 0$. Essenzialmente essa dice che si sostituiscono alle σ_{Y_i} delle deviazioni standard effettive ottentue sommando in quadratura quelle delle Y e quelle delle X, opportunamente propagate mediante la derivata $\partial Y/\partial X$, che nel caso lineare è esattamente m. Ovviamente, in questo caso la soluzione diventa più complicata, ma il problema può essere affrontato per iterazione, calcolando m e c senza tener conto delle σ_{X_i} e poi inserendo nelle formule le deviazioni standard effettive calcolate con questo valore di m. La convergenza è, in genere talmente rapida, che, se i punti sono già stati graficati, nemmeno vale la pena di fare troppi conti: basta valutare a occhio m dal grafico e usare questo valore nel calcolo delle deviazioni standard effettive.

12.3 Formule dei minimi quadrati

Riportiamo direttamente i risultati che si ottengono applicando i ragionamenti descritti nel paragrafo precedente.

12.3.1 σ_Y nota e costante

Indichiamo con

$$\begin{aligned}
n &: \text{numero di punti sperimentali;}\\
\sigma &: \text{deviazione standard delle } Y;\\
\overline{x} &: \text{media aritmetica dei valori delle ascisse;}\\
\overline{y} &: \textit{idem} \text{ per valori delle ordinate;}\\
\overline{x^2} &: \textit{idem} \text{ per i quadrati;}\\
\overline{x\,y} &: \textit{idem} \text{ per i prodotti;}\\
\text{Var}(x) &= \overline{x^2} - \overline{x}^2;\\
\text{Cov}(x, y) &= \overline{x\,y} - \overline{x}\,\overline{y}.
\end{aligned}$$

Si noti come la Var(x) non sia legata agli errori delle X (nulli), ma alla distribuzione dei punti sperimentali proiettata sull'asse delle ascisse. Con questo formalismo abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}
\widehat{m} \equiv \mathrm{E}(m) &= \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{Var}(x)} && (12.6)\\
\sigma(m) &= \frac{1}{\sqrt{Var(X)}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} && (12.7)\\
\widehat{c} \equiv \mathrm{E}(c) &= \overline{y} - \widehat{m} \cdot \overline{x} && (12.8)\\
\sigma(c) &= \sqrt{\overline{x^2}} \cdot \sigma(m) \left(= \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(x) + \overline{x}^2}}{\sqrt{\mathrm{Var}(x)}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) && (12.9)\\
\rho(m,c) &= -\frac{\overline{x}}{\sqrt{\overline{x^2}}} \left(= \frac{\mathrm{segno}(\overline{x})}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{Var}(x)}{\overline{x}}}} \right). && (12.10)
\end{aligned}$$

Si noti la dipendenza delle incertezze dalla deviazione standard che descrive la distribuzione degli errori sulle Y_i, dal numero di punti sperimentali (il solito $1/\sqrt{n}$), dal *braccio di leva* dei punti sperimentali (quantificato da $\sqrt{\mathrm{Var}(x)}$) e, per quanto riguarda l'intercetta, dalla distanza del baricentro dei punti dall'asse Y. Il coefficiente di correlazione è pari a zero quando la coordinata x del baricentro dei punti sperimentali è pari a 0, mentre aumenta in modulo quando i punti sono molto distanti. Il suo segno è uguale a quello della coordinata X del baricentro. Si faccia inoltre a non confondere questo il correlazione fra m e c con quello fra x e y, ovvero $\rho(x,y)$.

Si noti, inoltre, come l'equazione 12.8 indica che il baricentro dei punti debba appartenere alla retta ottenuta dal fit. Questo rappresenta un modo rapido per verificare che non ci siano errori di calcolo.

12.3.2 σ_{Y_i} ignote e supposte costanti

Tutte le formule precedenti valgono ancora. La sola differenza consiste nel fatto che σ va valutato dagli scarti fra le ascisse dei punti sperimentali e quelle della retta che meglio approssima i punti, ovvero quella in corrispondenza di $\mathrm{E}(m)$ e $\mathrm{E}(c)$. Si è già fatto cenno a questo metodo nel paragrafo 10.5.2. In analogia con la deviazione standard, si calcola la radice quadrata della media dei quadrati degli scarti fra y_i e le funzioni calcolate in x_i. Inoltre, come spiegato nel paragrafo 10.5.1, il problema diventa complicato quando il numero di punti sperimentali è piccolo. Con i dovuti caveat espressi in tale paragrafo, il modo usuale e che "va nella direzione giusta" di trattare il problema è di dividere per $n-2$, anziché per n, la somma dei quadrati dei residui. Quindi la formula pratica è

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (y_i - \widehat{m}\,x_i - \widehat{c})^2}{n-2}}\,. \qquad (12.11)$$

12.3.3 σ_{Y_i} diverse e note a priori

Quando le deviazioni standard che descrivono i possibili errori sulle ordinate sono note, ma diverse fra loro valgono ancora le formule (12.6)-(12.10), con le seguenti variazioni:

- tutte le medie ($\overline{x}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y}$ e $\overline{x\,y}$) sono calcolate come medie pesate con pesi p_i pari gli inversi delle varianze delle Y_i:

$$
\begin{aligned}
p_i &= \frac{1}{\sigma^2_{Y_i}} \\
\overline{x} &= \frac{\sum_i p_i\, x_i}{\sum_i p_i} \\
\overline{x^2} &= \frac{\sum_i p_i\, x_i^2}{\sum_i p_i} \\
\overline{y} &= \frac{\sum_i p_i\, y_i}{\sum_i p_i} \\
\overline{x\,y} &= \frac{\sum_i p_i\, x_i\, y_i}{\sum_i p_i}\,;
\end{aligned}
$$

- la combinazione σ^2/n che compare nel calcolo delle deviazioni standard dei parametri è sostituita dall'inverso della somma dei pesi:

$$
\frac{\sigma^2}{n} \longrightarrow \frac{1}{\sum_i pi}\,.
$$

12.4 Esempi di applicazione delle formule dei fit

12.4.1 Incertezze ignote e presupposte uguali

Questo è sicuramente il caso più interessante per le applicazioni di laboratorio. Infatti non sempre è possibile valutare le deviazioni standard associate agli errori casuali ripetendo molte volte le misure a parità di condizioni. Inoltre anche ripetendo le misure si potrebbe non tenere conto di possibili fluttuazioni che dipendono dal valore del misurando (vedi discussione sugli errori sistematici, paragrafo 12.7, primo punto). Come esempio numerico, consideriamo i dati dell'allungamento della molla in funzione della massa applicata (vedi tabella 2.5). Si noti l'assenza, a questo livello, di incertezze associate alle misure. Infatti ogni stima sarebbe arbitraria, come discusso lungamente nei capitoli precedenti. I valori sono stati riportati con tutte le cifre che si riuscivano ad apprezzare sugli strumenti. Si noti come gli studenti abbiano deciso, nonostante le raccomandazioni contrarie, che, date le condizioni di lavoro, fosse difficile effettuare letture al di sotto del millimetro. Vedremo nel seguito se, con il senno del poi, avrebbero dovuto sforzarsi un po' e quali sono le conseguenze sul risultato.

Riportiamo nella tabella 12.1 i dettagli dei calcoli. I simboli $\sum_x$, $\sum_{x^2}$, $\sum_y$,$\sum_{x\,y}$ stanno per le sommatorie di interesse. Si noti come il numero di cifre della tabella non è legato alle regole sulle cifre significative, secondo le