## Test di autovalutazione

Eseguire le seguenti operazioni e semplificazioni (quando è possibile).

1. Dare il valore numerico approssimato di:
   (a) $\pi$:
   (b) $e$:
2. Sapendo che $a = 0.2$, calcolare $a^4$.
3. Ordinare in ordine crescente i seguenti valori: $\pi/2$; $-0.33$; $2^2$; $2^{-4}$; $0.41$; $2^{-2}$; $e^{-34}$.
4. Calcolare esattamente: $\log_2 32$; $\log_2 1024$.
5. Calcolare esattamente: $\log_{23} 23$; $\log_{23} 1$
6. Calcolare esattamente $\ln(e^{-5})$.
7. Semplificare, se possibile, $\log(a/b) + \log b$.
8. Quali delle sequenti operazioni sono impossibili nel dominio dei numeri reali?
   (a) $(e^{\sqrt{\pi}})^{e^{\sqrt{\pi}}}$;
   (b) $\ln(-2)$;
   (c) $\sqrt{-4}$;
   (d) $\ln(\sqrt{\pi})$;
   (e) $e^{-\pi^8}$.
9. Dati $a = \frac{2}{3}\, e^{5\,x}$ e $b = \frac{3}{5}\, e^{-3\,x}$, ricavare l'espressione di $c = a\, b$ raccogliendo e semplificando.
10. Dati $a = \frac{1}{4}\, e^{2\,x^2}$, $b = e^{-3\,x}$ e $c = e^3$, ricavare l'espressione di $d = \sqrt{a}\, b^2\, c^3$, cercando di arrivare possibilmente ad una espressione compatta.
11. Quanto vale $\frac{10^{-10}}{10^{-5}}$?
12. Calcolare (in modo approssimativo)
$$\frac{2 \cdot 10^{-5} \times 0.5 \cdot 10^3 \times 100}{0.67 \cdot 10^{-4} \times 1.5}\,.$$
13. Le variabili $x$ e $y$ sono soggette alle seguenti condizioni
$$\begin{cases} -x & > & -1 \\ x & < & \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y & < & 2 \\ -y & < & -\frac{1}{2} \end{cases}\,.$$
    Quale delle due ha il valore massimo?
14. Semplificare, se possibile,
$$\frac{\sqrt[3]{a^2\, b^6}}{a\, b^3}\,.$$

15. Semplificare, se possibile, $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

16. Semplificare, se possibile,
$$\left(\frac{a^2\, b}{c}\right)^{-1} \left(\frac{a\,\sqrt{b}}{c}\right)^2$$

17. Espandere $(x - 3\,y)^2$.

18. Un mattone pesa un chilo più un terzo di mattone. Quanto pesa un mattone?

19. Se $x = 1 + x/3$, quanto vale $x$?

20. La grandezza $y$ è inversamente proporzionale a $x$. Cosa succede a $y$ se il valore di $x$ raddoppia?

21. Una fotocopiatrice riproduce un'immagine con un rapporto di ingrandimento di 1.41 (ovvero +41%). Sapendo che originale e copia sono stampate sullo stesso tipo di carta, calcolare il peso della copia sapendo che il peso dell'originale vale 0.25 g. (Per i pignoli: ovviamente si considerano copia e originale dell'immagine ritagliate dal contorno).

22. Si considerino dei recipienti cilindrici dei quali il recipiente $A$ contiene 20 litri di acqua. Il recipiente $B$ ha un diametro doppio di quello di $A$. Il recipiente $C$ ha l'area di base metà di quella di $A$. Il recipiente $D$ ha un'altezza doppia di quella di $A$. Il recipiente $E$ ha tutte le dimensioni raddoppiate rispetto ad $A$. Trovare il volume dei vari recipienti.

23. Un pacco, di forma cubica, ha il lato di 30 cm. Un altro pacco, della stessa forma e con un contenuto avente la stessa densità, pesa 8 volte più del primo. Quanto vale la lunghezza del suo lato?

24. Un pallone, approssimabile a una sfera, ha inizialmente un volume di $1\,\mathrm{m}^3$. Successivamente il pallone viene gonfiato finché la superficie del pallone arriva a 4 volte quella iniziale. Quanto vale il nuovo volume?

25. Data la relazione che lega (in valore assoluto) la forza di gravità alle masse $m_1$ e $m_2$ poste alla distanza $R$
$$F = G\,\frac{m_1\, m_2}{R^2}$$
    (a) ricavarsi l'espressione di $G$, date $F$, $m_1$, $m_2$ e $R$;
    (b) ricavarsi l'espressione di $R$, date $F$, $G$ $m_1$ e $m_2$.

26. Sapendo che $a_c = \frac{v^2}{R}$, $v = \frac{2\,\pi\,R}{T}$ e $f = \frac{1}{T}$, ricavare $a_c$ in funzione di $f$ e di $R$.

27. Dalla relazione $V = V_0\, e^{-t/\tau}$, con $\tau = R\,C$, trovare $C$ dai valori di $V$, $V_0$, $t$ e $R$.

28. Trovare i valori di $x$ e $y$ che soddisfano le seguenti equazioni: $y = 2\,x + 1$ e $y = -3\,x + 2$. Dire anche qual'è il significato geometrico della coppia $\{x_s, y_s\}$ soluzione delle equazioni.

29. Trovare l'equazione della retta che passa per i punti $P_1 = \{1, 2\}$ e $P_2 = \{3, 4\}$.

30. Trovare l'equazione della retta che passa nel punto $P = \{2, -4\}$ e ha coefficiente angolare $m = 1/2$.

31. Per quali valori di $b$ l'equazione $4\,x^2 + b\,x + 9 = 0$ ammette soluzioni reali?

32. Se $\sin\theta = 0.4$, quanto vale (approssimativamente) $\cos\theta$?

33. Dati i sequenti angoli, $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 45°$, $\theta_3 = 60°$, dire per quale angolo la funzione seno è maggiore o minore della funzione coseno.

34. Esprimere in radianti i valori dei seguenti angoli: $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 45°$, $\theta_3 = 60°$, $\theta_4 = 90°$, $\theta_5 = 180°$ e $\theta_5 = 360°$.

35. Semplificare $\frac{(1+\cos\theta)\,(1-\cos\theta)}{\tan^2\theta}$.

36. I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ hanno moduli rispettivamente pari a $|\vec{a}| = 10$ e $|\vec{b}| = 8$ e formano fra di loro un angolo di $60°$. Calcolare la lunghezza della proiezione di $\vec{b}$ su $\vec{a}$.

37. I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ hanno moduli rispettivamente pari a $|\vec{a}| = 10$ e $|\vec{b}| = 8$ e formano fra di loro un angolo di $60°$. Calcolare il prodotto scalare $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

38. Dati i vettori $\vec{a} = \{2, 3, -1\}$ e $\vec{b} = \{0, 4, 3\}$ e gli scalari $\alpha = 2$ e $\beta = -3$ calcolare: $v_1 = \vec{a}+\vec{b}$, $v_2 = \vec{a} - \vec{b}$, $v_3 = \alpha\,\vec{a} - \beta\,\vec{b}$.

39. Dati i vettori $\vec{a} = \{2, 3, -1\}$ e $\vec{b} = \{0, 4, 3\}$, calcolare: modulo dei vettori, prodotto scalare e coseno dell'angolo compreso fra di essi.

40. Dati i vettori $\vec{a} = \{1, -1, 0\}$ e $\vec{b} = \{-2, 0, 3\}$, valutare le componenti del prodotto vettoriale $\vec{a}\times\vec{b}$.

41. Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, è noto che $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = 2$ e $|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{20}$. Calcolare, quando hanno senso, le seguenti espressioni

    (a) $|\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a}|$;

    (b) $|\vec{a}\times\vec{b} - \vec{b}\times\vec{a}|$;

    (c) $|\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\times\vec{a}|$;

    (d) $|\vec{a}\times\vec{b} - (\vec{a}+\vec{b})|$.

42. Data $s(t) = \frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,t + s_0$, valutare le funzioni $v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,s(t)$ e $a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,v(t)$.

43. Data $f(t) = A\,\cos(\omega\,t + \phi) + B\sin(2\,\omega\,t + \psi)$, valutare $g(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)$.

44. Valutare
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,\frac{1}{2}\,e^{-\alpha^2\,x^2}\,.$$

45. Valutare
$$a)\quad \int_1^2 (2 + x^2)\,\mathrm{d}x\,;$$
$$b)\quad \int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$