Fisica 1
Informatici
(A.A. 04/05, Canale P-Z, Prof. G. D'Agostini)

1. **Lunedi 14/3, 14:00–16:00**

   Introduzione corso e informazioni varie.
   Test di autovalutazione.
   Cinematica: studio del movimento dei corpi. Caso ad una dimensione: diagramma orario: $x(t)$.
   Concetto intuitivo di velocità e accelerazione.
   Moto del punto materiale. Definizioni di *velocità* media nel moto in una dimensione.
   Precisazioni:

   – Moto rispetto a chi? → *Sistema di riferimento.*
   – Moto di chi? → Schematizzazione di *punto materiale.*
   – Significato di $v = \Delta x/\Delta t$:

   $$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}\,, \tag{1}$$

   ove $t_2 > t_1$ (ovvero l'istante t_2 viene dopo t_1).
   Tipicamente, conviene scegliere $\Delta t > 0$ (freccia orientata dal 'prima' al 'dopo') e quindi il segno di v dipende dal segno di Δx.

2. **Giovedi 17/3, 18:00–19:00**

   Ancora grafici orari, con accelerazione costante: $x(t)$, $v(t$ e $a(t)$ sulla stessa scala temporale.
   Velocità media (in generale).
   Unità di misura: → SI: m, s, m/s, m/s^2. (Ma a volte è più conveniente – 'naturale' — usare altre unità di misura. tipicamente multipli o sottomultipli delle unità di base: km, cm, ora, anno, ns, etc.: → *Conversioni.*)
   Importante: abituarsi a scrivere le grandezze fisiche con le rispettive unità di misura (e possibilmente nel SI) e non 'inventarsi' alla fine l'unità di misura del risultato, dopo aver fatto i conti. (Il 'controllo dimensionale' è ottimo check: se le 'dimensioni' non sono quelle attese ci sono degli errori nella formula!)
   Velocità come 'pendenza' di $x(t)$ e accelerazione come 'pendenza' di $v(t)$ ('pendenza' → attenzione ad unità di misura!). Velocità e accelerazione istantanea: velocità e accelerazione nel linguaggio del calcolo differenziale.

Δx come somma di tanti $\Delta x_i = v_i \Delta t_i$ e, analogalmente Δv come somma di tanti $\Delta v_i = a_i \Delta t_i$.
Incremento di velocità fra t_1 a t_2 come 'area' sotto la curva $a(t)$ fra $t = t_1$ e $t = t_2$. (Attenzione al segno: l'area sopra l'asse delle ascisse è positiva, quella sotto è negativa). Analogalmente, *incremento* di posizione fra t_1 a t_2 come 'area' sotto la curva $v(t)$ fra $t = t_1$ e $t = t_2$.
Problemini proposti:

(a) All'istante $t_1 = 10\,s$ un corpo si trova nel punto $x_1 = 5\,\mathrm{m}$. Sapendo che il corpo viaggia con velocità costante $v = -2\,\mathrm{m/s}$, calcolare la posizione all'istante $t_2 = 15\,s$.

(b) All'istante $t_1 = 2\,s$ un corpo ha una velocità $v_1 = 2\,\mathrm{m/s}$. Sapendo che il corpo è soggetto ad una accelerazione costante $a = 3\,\mathrm{m/s^2}$, calcolare accelerazione e velocità all'istante $t_2 = 6\,s$.

(c) Maratoneta percorre 42 km e 195 m in 2 ore e 8 min (Roma 13/3/05): calcolare velocità media in km/h e in m/s (non usare 'fattori di conversione', ma usare semplicemente $v = \Delta s/\Delta t$, con Δs e Δt nelle varie unità).

(d) Nuotatore fa 8 vasche da 50 metri in 5 minuti e 40 secondi: calcolare velocità media.

(e) Auto accelera da 0 a 100 km/h in 7 secondi: calcolare accelerazione media in $\mathrm{m/s^2}$.

(f) Nella prima metà di un certo percorso un auto viaggia a velocità v_1, nella seconda metà a v_2. Calcolare velocità media. [Nota: Applicare la formula ad un percorso di 100 km nei seguenti due casi: I) $v_1 = 100\,\mathrm{m/s}$, $v_1 = 50\,\mathrm{m/s}$; II) $v_1 = 100\,\mathrm{m/s}$, $v_1 = 1\,\mathrm{m/s}$. Calcolare anche il tempo di percorrenza di ciascuna metà del percorso e riflettere attentamente alla consistenza di formule e risultati ottenuti.]

(g) Velocità della Terra intorno al Sole, assumendo orbita circolare: *cercarsi* i dati che servono: distanza Terra-Sole e periodo di rivoluzione.

(h) Velocità intono all'asse di rotazione terrestre di I) persona all'equatore; II) persona a Roma (42^o latitudine).

(i) Oggetto, inizialmente fermo, cade da una torre. Posizione in funzione del tempo (sistema di riferimento diretto verso il basso): $s(t = 0\,\mathrm{s}) = 0$; $s(t = 0.5\,\mathrm{s}) = 1.225\,\mathrm{m}$; $s(t = 1\,\mathrm{s}) = 4.9\,\mathrm{m}$; $s(t = 2\,\mathrm{s}) = 19.6\,\mathrm{m}$.

   I) Calcolare la velocità media nei tre tratti (da 0 a 0.5 s, etc.).

   II) Assumendo che la velocità vari *linearmente* con il tempo, calcolare la velocità per $t = 0.5\,\mathrm{s}$, $t = 1\,\mathrm{s}$ e $t = 2\,\mathrm{s}$.

   III) Calcolare l'accelerazione media nei tre tratti (da 0 a 0.5 s, etc.).

3. **Venerdi 18/3, 14:00–16:00**

$\Delta x = \sum_i \Delta x_i = v_i \Delta t_i$ e, analogalmente $\Delta v = \sum \Delta v_i = a_i \Delta t_i$: Soluzione numerica con pseudocodice.
Moto uniformemente accelerato (o decelerato, se $a < 0$), ovvero a costante. Caso semplice: possiamo considerare 'un solo Δt' dall'istante iniziale $t_0 = 0$ all'istante finale (di interesse) t [ovvero $\Delta t \to t$]:

$$\begin{aligned} \Delta v &= a\,t \qquad (\text{con } t_0 = 0) && (2)\\ v(t) - v_0 &= a\,t && (3)\\ [\,v_0 = v(t_0) = v(0)\,] & && \\ v(t) &= v_0 + a\,t && (4)\\ v_m &= \frac{v_0 + v(t)}{2} = \frac{2\,v_0 + a\,t}{2} = v_0 + \frac{a}{2}\,t && (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= v_m\,t && (6)\\ x(t) - x_0 &= v_m\,t && (7)\\ x(t) &= x_0 + v_m\,t && (8)\\ &= x_0 + \left[v_0 + \frac{a}{2}\,t\right]\,t && (9)\\ &= x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 && (10)\end{aligned}$$

[per il generico t_0:

$$x(t) = x(t_0) + v_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\,a\,(t - t_0)^2\ ] \qquad (11)$$

Velocità varia linearmente con il tempo; posizione varia quadraticamente. $v(t)$ è una retta; $x(t)$ è una parabola.
Caso particolare, con $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$:

$$\begin{aligned} v(t) &= a\,t && (12)\\ x(t) &= \frac{1}{2}\,a\,t^2\,. && (13)\end{aligned}$$

Accelerazione di gravità $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$: tutti i corpi nello stesso punto sulla superficie terrestre, nel vuoto e non soggetti ad 'altre forze', cadono con la stessa accelerazione.
Problemini tipici che si risolvono con questo schema:

(a) Corpo cade da una torre di altezza h (trascurando resistenza dell'aria)
   - A che velocità arriva al suolo?
   - Quanto tempo ci mette?

(b) Corpo lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_0:

– A che altezza arriva?
– Quanto tempo ci mette?
– A che altezza ritorna alla posizione di partenza?
– Quanto ci mette a a tornare?
– Grafico $z(t)$.
– Come varia la velocità (con segno) da quando l'oggetto parte verso l'alto a quando torna nella posizione iniziale? ($\rightarrow$ grafico.)
– Grafico di $a(t)$.

(c) Problemi di accelerazione e frenata di veicoli sono assolutamente analoghi:
  – Quanto tempo impiega per arrestarsi una macchina che è frenata con accelerazione a (per es $a = -2\,\mathrm{m/s^2}$) se all'inizio della frenata viaggiava a v_0 (per es. $100\,\mathrm{k/h}$)?
  – Quanto vale lo spazio di arresto? [$\rightarrow d = d(v_0, a)$].

Accelerazione e forze: $F = m\,a$ (Seconda legge di Newton), da imparare a leggere '$a = F/m$', nel senso che i problemi tipici sono quelli di dedurre la cinematica dei corpi a partire dalle forze in gioco. F sta per *risultante delle forze* che agiscono su m: Esempi: pallina in caduta libera; pallina ferma sul tavolo; pallina trascinata a velocità costante (in quest'ultimo caso da $a = 0$ e F_{spinta} si risale a $F_{resistenza}$ — altro esempio: macchina a velocità costante).
Esercitazioni:

– 'Problemini' di ieri: commenti e/o soluzioni.
– Incontro fra treni.
– Calcolo di $v(t)$ e $a(t)$ data $x(t) = \alpha + \beta\,x + \gamma\,x^2 + \delta\,x^3$, ove i parametri α, β, γ e δ sono espressi, rispettivamente, in m, m/s, m/s^2 e m/s^3.

4. **Lunedi 21/3, 14:00–16:00**

Problema: 'sasso nel pozzo': dati: $t = 3\,\mathrm{s}$; $v_s = 300\,\mathrm{m/s}$.
Ripasso/esercizio relazione fra incrementi e aree.
Riprendiamo $v(t) \rightarrow x(t)$.

– Se v **costante** gli incrementi di x per ogni Δt_i sono dati da $\Delta x_i = v\,\Delta t_i$. L'incremento totale da t_1 a t_2 è pari a

$$\Delta x \;=\; \sum_i \Delta x_i = \sum_i v\,\Delta t_i\,, \tag{14}$$

ove la sommatoria è (implicitamente) estesa a tutti gli intervallini contigui compresi fra t_1 e t_2 (ovvero $\Delta t = t_2 - t_1 = \sum_i \Delta t_i$). Ovviamente in questo caso vale, banalmente:

$$\Delta x \;=\; v\sum_i \Delta t_i\,, \tag{15}$$

ove

– Se v **varia con il tempo**, la (14) può essere sostituita da

$$\Delta x \;=\; \sum_i v_{m_i}\, \Delta t_i \,, \tag{16}$$

ove v_{m_i} è la velocità media in ciascun intervallino Δt_i. Ma la valutazione di v_{m_i} non è affatto banale se $v(t)$ varia in modo complicato.

 ∗ Un *sottocaso 'trattabile'* è quando $v(t)$ varia linearmente con il tempo. In questo caso v_{m_i} corrisponde al valore di $v(t)$ al centro dell'intervallino Δt_i, che indichiamo con v_i:

$$\Delta x \;=\; \sum_i v_i\, \Delta t_i \,. \tag{17}$$

 [Questa formula è valida anche per un solo intervallo Δt, riottenendo così la (15)].

 ∗ Il *caso generale* è invece quando la sommatoria è estesa ad un grandissimo numero di intervallini, che di conseguenza diventano molto piccoli (al limite, tendono a zero). Infatti, quando il '*campionamento*' del tempo è molto elevato, la differenza fra $v(t)$ e $v(t + \Delta t)$ è molto piccola e quindi: $v(t)$ varia linearmente in tale intervallino; ovvero il valore centrale v_i coincide con il valore medio. Possiamo allora scrivere l'incremento di posizione su un intervallo di tempo 'macroscopico' $\Delta t = t_2 - t_1$ come

$$\Delta x \;=\; \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i \Delta x_i = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i v_i\, \Delta t_i \,. \tag{18}$$

 È facile vedere come $\lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i v_i\, \Delta t_i$ è pari all'*area* "sotto la curva $v(t)$" (con la solita convenzione dei segni vista precedentemente).

– Riassumiamo il caso generale, al quale sono riconducibili i due casi particolari di velocità costante e di moto uniformemente accelerato:

$$\Delta x|_{t_1}^{t_2} \;=\; \mathcal{A}[v(t)]_{t_1}^{t_2} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i v_i\, \Delta t_i \equiv \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, \mathrm{d}t \tag{19}$$

$$\Delta v|_{t_1}^{t_2} \;=\; \mathcal{A}[a(t)]_{t_1}^{t_2} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i a_i\, \Delta t_i \equiv \int_{t_1}^{t_2} a(t)\, \mathrm{d}t \,, \tag{20}$$

ove

 - indichiamo con $\mathcal{A}\,[f(t)]_{t_1}^{t_2}$ l'area sotto la generica funzione $f(t)$ fra t_1 e t_2 (nota: $\mathcal{A}\,[f(t)]_{t_1}^{t_2}$ non è un simbolo 'ufficiale');
 - '$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, \mathrm{d}t$' sta ad indicare il limite '$\lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i f_i\, \Delta t_i$', con questa interpretazione dei simboli:
   · '$\int$' sta per una 'S' stilizzata, a ricordare che si tratta di una 'somma';

· $\mathrm{d}t$ rappresenta l'intervallino 'infinitesimo' di Δt;

· t_1 e t_2 sono i limiti della 'somma'.

'$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$' è chiamato 'integrale di $f(t)$ in $\mathrm{d}t$ da t_1 a t_2' e le tecniche del suo calcolo saranno apprese nel corso di 'calcolo integrale' (ma ciò non deve spaventare: l'importante, per ora, è averne capito il concetto).

Dal punto di vista computazionale è importante capire che in pratica

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i f_i\,\Delta t_i \;\approx\; \lim_{\Delta t_i \;\to\; `\Delta t_i \;molto\; piccolo'} \sum_i f_i\,\Delta t_i \tag{21}$$

con la quale è possibile risolvere i problemi in modo *numerico* (e con eccellette grado di approssimazione) quando la soluzione esatta mediante l'integrale è difficile o addirittura impossibile (vedi esempi di programmi sul sito del corso).

Esempi di forze:

(a) *Forza gravitazionale* fra due corpi:

$$F \;=\; -G\,\frac{m_1\,m_2}{d^2} \tag{22}$$

con m_1 e m_2 la massa dei due corpi, d la loro distanza (fra i loro 'centri' se si tratta di corpi estesi — un concetto che sarà chiarito nel seguito) e G una costante opportuna tale che se le masse sono espresse in kg e la distanza in m, la forza risultante sarà in Newton (N): $G = 6.67300\times10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}} = 6.67300\times10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}$. Il segno negativo sta ad indicare che la forza è *attrattiva*.

(b) *Forza elettrostatica* (di Coulomb) fra due corpi carichi:

$$F \;=\; k_0\,\frac{Q_1\,Q_2}{d^2} \tag{23}$$

ove Q_1 e Q_2 sono le cariche espresse in Coulomb (C), d come sopra e k_0, altra costante, di valore $k_0 = 9\times10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$.
Si noti come questa forza può essere repulsiva o attrattiva a seconda del segno relativo delle cariche.

(c) *Forza elastica* (di una molla)

$$F \;=\; -k\,x\,, \tag{24}$$

ove x è preso dalla posizione di equilibrio (a volte si incontra Δx invece di x, ad indicare che si tratta di una differenza rispetto a x_0 di equilibrio) e k è una costante, dipendente dalla molla, di unità N/m.
La forza è negativa se x è positivo, positiva se x è negativo, in quanto è una *forza di richiamo* verso la posizione di equilibrio $x=0$.

(d) *Forza di attrito dinamico* indipendente dalla velocità su piano orizzontale:

$$F = -\mu_d \, m \, g \, \hat{v} \,, \tag{25}$$

ove μ_D è il *coefficiente di attrito*, m la massa del corpo e $\hat{v}$ il *versore* della velocità.
Questa forza è sempre frenante.

(e) *Forza di viscosità* dipendente linearmente dalla velocità:

$$F = -\beta \, v \,, \tag{26}$$

ove β è un opportuno coefficiente e v la velocità.
Questa forza è sempre frenante.

Conoscendo la formula della forza si può determinare l'accelerazione da $a = F/m$ (se questa è la sola forza agente):

(a) *forza gravitazionale*: $a_1 = -G\, m_2/d^2$, $a_2 = -G\, m_1/d^2$
(caso particolare di uma massa m sulla superficie terrestre: $F = -G\, M\, m/R^2$, da cui $a = -G\, M/R^2 \equiv -g$);

(b) *forza elettrostatica*: $a_i = (1/m_i)\, k_0\, Q_1\, Q_2\, /d^2$;

(c) *forza elastica*: $a = -(k/m)\, x$;

(d) *forza di attrito dinamico* $a = -\mu_d\, g$;

(e) *forza di viscosità* $a = -(\beta/m)\, v$;

(Si faccia attenzione ai diversi significati del generico simbolo di costante k.)

Esperimento della molla: misura dell'allungamento e del periodo in funzione del numero di pesetti applicati.

# dischi	x (s)	Periodo (s)		
		cr1	cr2	cr3
0	1.8	—	—	—
1	1.8	—	—	—
2	1.8	—	—	—
3	3.3	0.481	0.449	0.491
4	4.9	0.539	0.566	0.560
5	6.8	0.603	0.623	0.617
6	8.5	0.664	0.693	0.672
7	10.0	0.692	0.721	0.717
8	11.8	0.757	0.777	0.770
9	13.4	0.793	0.806	0.810
10	15.1	0.846	0.875	0.846

ove x è la posizione del punto terminale della molla, cr_i rappresentano i valori ottenuti dai tre cronometristi volontari e ogni dischetto pesa 79 g.
Determinazione della costante k della molla.

Problemini

(a) Conoscendo g sulla Terra, pari a $9.8\,\mathrm{m/s^2}$, calcolare l'accelerazione di gravità g' (dovuta al solo campo gravitazionale terrestre) di un corpo distante 400000 km dalla Terra

(b) Due cariche uguali, distanti 1 m, si respingono con una forza di 1 N. Quanto vale la loro carica?

(c) Un corpo di 1 kg che viaggia orizzontalmente a una velocità di 2 m/s, arriva su una superficie orizzontale che presenta attrito. Il corpo si ferma in un metro. Calcolare il coefficiente di attrito dinamico.

(d) Approssimiamo la forza di resistenza dell'aria che frena la caduta di un paracadutista ad una forza di viscosità di $\beta = 98\,\mathrm{kg/s}$. Sapendo che il paracadutista (con equipaggio) pesa 100 kg, trovare la velocità limite di caduta.

(e) Un corpo di massa $m = 10\,\mathrm{kg}$ è appeso ad una corda. Calcolare la tensione della corda (ovvero la forza con la quale si sorregge il corpo) quando:

   I) il corpo è fermo;

   II) il corpo cade con accelerazione $9.8\,\mathrm{m/s^2}$;

   III) il corpo sale con accelerazione di $9.8\,\mathrm{m/s^2}$.

5. **Giovedi 31/3, 18:00-19:00**

Moto circolare uniforme visto come moto unidimensionale lungo la circonferenza, a partire dalla conoscenza della velocità v e del raggio R.

- Distanza percorsa in un giro: $c = 2\,\pi\,R$.
- Tempo impiegato a compiere un giro (*periodo*) $T = c/v = 2\,\pi\,R/v$.
- Giri compiuti nell'unità di tempo (*frequenza*) $\nu = 1/T$ (misurata, per es., in giri/s)
- Angolo compiuto nell'unità di tempo: siccome il punto materiale effettua 360^o gradi/giro, otteniamo

$$\frac{360\,\mathrm{gradi}}{\mathrm{giro}} \times \nu \frac{\mathrm{giri}}{\text{unità di tempo}} \rightarrow 360^o \times \nu \quad \text{(gradi/secondo)} \tag{27}$$

- **Ma** siccome si preferisce misurare gli angoli nell'unità naturale *radiante*, si associa generalmente il concetto di *velocità angolare* ($\omega = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$) al numero di radianti percorsi nell'unità di tempo:

$$\omega = 2\,\pi\,\nu \tag{28}$$
$$= \frac{2\,\pi}{T} \tag{29}$$
$$= \frac{2\,\pi\,V}{2\,\pi\,R} = \frac{v}{R}\,, \tag{30}$$

  ovvero $v = \omega\,R = 2\,\pi\,\nu\,R$, etc.

Osservazioni sulle dimensioni di ω: sono radianti al secondo, ma le dimensioni sono s^{-1} in quanto i radianti sono adimensionali (rapporto fra due lunghezze).

Se consideriamo la posizione angolare di un punto si può anche introdurre una accelerazione angolare, ovvero una misura della variazione della velocità angolare nel tempo:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} \tag{31}$$

$$\dot{\omega} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}\,. \tag{32}$$

Ovviamente lo studio della variazione della posizione angolare nel tempo è perfettamente analoga alla variazione della generica coordinata unidimensionale x.

Radianti e funzioni trigonometriche. Proiezioni lungo gli assi X e Y. Equazione parametrica del moto circolare uniforme

$$x(t) = R\,\cos[\theta(t)] = R\,\cos(\omega\,t) \tag{33}$$

$$y(t) = R\,\sin[\theta(t)] = R\,\sin(\omega\,t) \tag{34}$$

(avendo scelto $t = 0$ quando la particella si trova in $x = R$ e $y = 0$, ovvero $\theta(t = 0) = 0$).
Velocità delle proiezioni:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,R\,\cos(\omega\,t) = -R\,\omega\,\sin(\omega\,t) \tag{35}$$

$$v_y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,R\,\sin(\omega\,t) = R\,\omega\,\cos(\omega\,t) \tag{36}$$

esercizio: provare a calcolare l'accelerazione delle proiezioni $a_x(t)$ e $a_y(t)$ e i rapporti $a_x(t)/x(t)$ e $a_y(t)/y(t)$.

6. **Venerdi 1/4, 14:00-16:00**

Accelerazione angolare: semplicemente $\dot{\omega} = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = (1/R)\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$.
Tutt'altro concetto: accelerazione delle proiezioni in caso di moto circolare uniforme (ovvero quando $v =$ costante $\rightarrow \omega =$ costante $\rightarrow \dot{\omega} = 0$):

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,v_x(t)\left[= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,x(t)\right] = -R\,\omega^2\,\cos(\omega\,t) \tag{37}$$

$$a_y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,v_y(t)\left[= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,y(t)\right] = -R\,\omega^2\,\sin(\omega\,t) \tag{38}$$

Confrontando queste equazioni con le (33) e (33):

$$a_x(t) = -\omega^2 x(t) \tag{39}$$
$$a_y(t) = -\omega^2 y(t)\,. \tag{40}$$

Concentriamoci all'istante $t = 0$, che abbiamo scelto convenzionalmente al passaggio del punto materiale per $x = R$ e $y = 0$, ovvero per $\theta = 0$:

- $v_x(0) = 0$, e $v_y(0) = \omega R$: la velocità è diretta verso l'alto (il verso dipende dalla scelta del verso di rotazione) e, soprattutto, essa è ortogonale al raggio che congiunge la posizione della particella con il centro del cerchio. Riconosciamo inoltre in $v_y(0)$ la velocità v lungo la circonferenza.
- $a_x(0) = -\omega^2 R$ e $a_y(0) = 0$: l'accelerazione è diretta lungo il raggio che congiunge la posizione della particella con il centro del cerchio. Il segno meno indica che l'accelerazione è diretta verso l'interno del cerchio.

Ma, per simmetria, queste considerazioni devono essere valide ovunque si trovi la particella lungo il cerchio (basta ridefinire lo zero del tempo l'istante in cui la particella si trova in un dato punto e costruire opportunamente il sistema di riferimento). Quindi le nostre considerazioni riguardo il moto circolare uniforme sono generali:

- la velocità è sempre diretta ortogonalmente al raggio, ed è quindi tangenziale alla circonferenza (è quindi anche chiamata *velocità tangenziale*);
- esiste un'accelerazione, in modulo $\omega^2 R = v^2/R$, diretta lungo il raggio, verso il centro del cerchio: *accelerazione centripeta*;
- se c'è un'accelerazione, ci deve essere una forza, in modulo uguale a $ma = m\,\omega^2\,R = m\,v^2/R$, diretta verso il centro del cerchio: *forza centripeta*.

Se indichiamo il raggio del cerchio con una freccia verso il punto ove si trova la particella, notiamo che, con il passare del tempo questa freccia ruota.

Idem, per la velocità (si immagini la luce del faro di una moto che si muove a velocità costante lungo la traiettoria): il punto di applicazione della freccia corre lungo la circonferenza e la freccia ruota. Per caratterizzare diverse velocità, si può pensare che le frecce siano lunghe $v = \omega\,R$. Se si immagina una freccia che ha punto di applicazione nell'origine e si mantiene sempre parallela a quella lungo la circonferenza, questa freccia ruota soltanto.

Stesso vale per l'accelerazione: freccia sempre 'antiparallela' alla freccia associata al raggio.

$\rightarrow$ vettori: grandezze caratterizzate da modulo, direzione e verso, e che possono essere definite dalle componenti. Le 'frecce' ruotanti di cui si parlava sopra sono, più propriamente, vettori ruotanti.

In generale:

$\vec{r}(t) = \{x(t),\, y(t)\}$;
$\vec{v}(t) = \{v_x(t),\, v_y(t)\}$

$\vec{a}(t) = \{a_x(t),\, a_y(t)\}$
$\vec{F}(t) = \{F_x(t),\, F_y(t)\}$

(e il passaggio a tre dimensioni è immediato). Le relazioni che abbiamo imparato su una dimensione valgono, scritte vettorialmente, in generale e si intendono riferite a ciascuna componente:

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{r}(t) \;\Rightarrow \{v_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x\,,\;\; v_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y\,\} \tag{41}$$
$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{v}(t) \;\Rightarrow \{a_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_x\,,\;\; a_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_y\,\} \tag{42}$$
$$\vec{F} = m\,\vec{a} \;\Rightarrow \{F_x = m\,a_x\,,\;\; F_y = m\,a_y\,\} \tag{43}$$

ovvero:

- l'operatore di derivata si intende applicato a ciascuna componente;
- moltiplicare un vettore per uno *scalare* (ovvero grandezze con una sola componente) vuol dire moltiplicare ciascuna componente per tale scalare.

Modulo del vettore: così come la lunghezza del raggio vettore $\vec{r}$ si ottiene applicando il teorema di Pitagora alle componeneti ($|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$) lo stesso vale per il modulo di altri vettori: $|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}$ e $|\vec{a}(t)| = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t)}$. In questo caso, per i ragionamenti fatti sopra, è chiaro come i moduli di questi vettori non dipendano dal tempo (ruotano soltanto, ma non si accorciano né si allungano), e valgano, rispettivamente, $|\vec{r}(t)| = R$, $|\vec{v}(t)| = \omega\,R$ e $|\vec{a}(t)| = \omega^2\,R$. Agli stessi risultati si arriva usando le espressioni di $x(t)$, $y(t)$, etc. Esercizio:

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{R^2\,\cos^2(\omega\,t) + R^2\,\sin^2(\omega\,t)} \tag{44}$$
$$= \sqrt{R^2\,[\cos^2(\omega\,t) + \sin^2(\omega\,t)]} \tag{45}$$
$$= R \tag{46}$$

Osservazione: dal confronto delle (37) e (38) con le (39) e (40), scriviamo

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,x(t) = -\omega^2\,x(t) \tag{47}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,y(t) = -\omega^2\,y(t) \tag{48}$$

Ovvero "la derivata seconda rispetto al tempo di una grandezza è proporzionale all'opposto della grandezza stessa". Quando questo si verifica le (33) e (34) ci mostrano che la variazione nel tempo della grandezza fisica è data da una funzione seno e coseno. Ci vuole poco a capire che la particolare funzione dipende dalla scelta delle condizioni iniziali (nel nostro caso l'aver scelto $t = 0$

l'istante di transito per il punto $\{R, 0\}$). In generale, per la generica grandezza $z(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\, z(t) \;=\; -\omega^2\, z(t) \quad \Longleftrightarrow \quad z(t) = A\, \cos(\omega t + \phi)\,, \tag{49}$$

ove l'ampiezza A e la fase ϕ dipendono dalle condizioni iniziali del problema.

A cosa è dovuta la forza centripeta? Esempio della cinghia ruotante. Cosa succede quando la forza non è più applicata?
Orbite circolari di satelliti: la forza centripeta è dovuta alla gravità:

$$-m\,\omega^2\, R \;=\; -\frac{G\, M\, m}{R^2}\,. \tag{50}$$

Massa inerziale (nel termine a sinistra, ovvero quella tale che "$a = F/m$") e *massa gravitazionale* (nel termine di sinistra, ovvero quella che ha ruolo analogo alla carica nella formula della forza di Coulomb). Esse sono concettualmente diverse, ma empiricamente proporzionali (l'irrilevante fattore di proporzionalità si riflette sul valore numerico di G). Ne segue:

$$\omega^2\, R \;=\; \frac{G\, M}{R^2} \tag{51}$$

$$\frac{(2\pi)^2}{T^2} \;=\; \frac{G\, M}{R^3} \tag{52}$$

$$T^2 \;=\; \frac{4\, \pi^2}{G\, M} R^3 \tag{53}$$

($\Rightarrow$ "Terza legge di Keplero".)

Problemi:

- Satellite per osservazioni, 600 km di altezza dalla superficie terrestre: velocità; periodo dell'orbita.
- Satellite geostazionario: quanto dista dalla Terra?
- Luna: distanza dalla Terra a partire dal suo periodo di rivoluzione intorno alla Terra.
- Sapendo G e conoscendo distanza Terra-Sole (150 milioni di km) e il periodo di rivoluzione della Terra intorno al Sole, 'pesare il Sole'.

Lancio di oggetti in presenza di gravità (sulla superficie terrestre): $\vec{F} = \{0, -m\, g\}$ $\Rightarrow$ moto lungo l'asse x è rettilineo uniforme; moto lungo l'asse y è uniformemente accelerato. Idea chiave: ogni proiezione si evolve per proprio conto.
Soluzione parametrica:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{array} \right. \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} v_x(t) = v_{x_0} \\ v_y(t) = v_{y_0} - g\, t \end{array} \right. \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + v_{x_0}\, t \\ y(t) = y_0 + v_{y_0}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{array} \right. \tag{54}$$

(Nota ovvia: queste equazioni valgono in assenza della resistenza dell'aria e finchè il corpo non incotra ostacoli).

- Sasso lanciato orizzontalmente da una torre.
- Problema della gittata, in funzione di velocità iniziale del proiettile e dell'angolo di lancio.

7. **Lunedi 4/4, 14:00-16:00**

Dall'equazione parametrica delle componenti all'equazione della traiettoria:

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \Rightarrow y(x)$$

eliminando la variabile tempo dal sistema di equazioni. Esempio del lancio di proiettile: $t = f(x)$, $\rightarrow y[(f(x)] \rightarrow y(x)$.
Diverso significato delle $x(t)$ e $y(t)$ rispetto a $y(x)$.
Determinazione dell'angolo rispetto all'asse delle ascisse (ovvero al piano orizzontale nel caso di lancio di proiettile, ove y stà per la quota):

- dalla equazione della traiettoria: $\tan\theta = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ (per definizione);
- dalle componenti del vettore velocità: $\tan\theta = v_y/v_x$ (più meno intuitivamente e come visto nel moto circolare uniforme).

Nota:

$$v_y/v_x = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} : \tag{55}$$

punto per punto il vettore velocità è parallelo alla tangente alla traiettoria.

Ancora sul moto circolare uniforme: guida circolare con oggetto che la percorre ad 'alta velocità' (cerchio della morte). Considerazioni cinematiche e dinamiche nel punto più in alto:

- Velocità assume un minimo e si può ritenere costante in un piccolizzimo intervallo di tempo: approssimazione moto circolare uniforme OK;
- Dalla cinematica sappiamo che $F_c = -m\,\omega^2 R = v^2/R$ (riferimento con verso verso l'alto, secondo il raggio vettore r).
- Bilancio delle forze:
  * Il corpo è sicuramente soggetto alla forza peso, $F = -mg$.
  * Ci deve essere sicuramente un'altra forza, associata alla guida, perchè se così non fosse il problema ammetterebbe solo la soluzione in cui la forza centripeta è esattamente uguale alla forza peso. Chiamiamo questa forza T, con verso positivo verso l'alto.

$$F_{tot} = -mg + T \quad (56)$$
$$-m\frac{v^2}{R} = -mg + T \quad (57)$$
$$T = -m\frac{v^2}{R} + mg \quad (58)$$

Ma T deve essere negativa o nulla, nel senso che la guida deve spingere il corpo verso il basso (una guida è un *vincolo* che spinge sempre il corpo normalmente alla superficie di contatto — si pensi ad un corpo che scorre su una superficie perfettamente liscia e piana. Se T fosse positivo significherebbe che la guida sta tirando il corpo verso di essa.) Ne segue:

$$T \le 0 \quad (59)$$
$$-m\frac{v^2}{R} + mg \le 0 \quad (60)$$
$$\frac{v^2}{R} - g \ge 0 \quad (61)$$
$$v \ge \sqrt{R\,g} \quad (62)$$

Variazione sul tema: forza centripeta dovuta all'attrito (statico!) su una vettura che percorre a velocità v un tratto di strada di raggio di curvatura R.
Problemino: sapendo che una vettura pesa 1000 kg, che il raggio di curvatura vale 200 m e che la velocità massima prima che le ruote perdano attrito e comincino a slittare vale 100 km/h, determinare il coefficiente di attrito statico ruote-asfalto.
Esercitazioni (seconda ora).

8. $\boxed{\textbf{Giovedi 5/4, 18:00-19:00}}$

Attrito statico e attrito dinamico: esperimentini in classe (pesetti tirati da elastico; scopa).
Operazioni su vettori: prodotto di un vettore per uno scalare (es. $\vec{F} = m\,\vec{a}$) e operatore derivata (es. $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$). Somma di vettori: dati $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ e $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, dal punto di vista matematico il vettore somma $\vec{c}$, ovvero $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ è ottenuto sommando le componenti, ovvero $c_x = a_x + b_x$, etc. Dal punto di vista fisico:

- si possono solo grandezze omogenee, e quindi, solo vettori omogenei ("mele con mele e patate con patate", some si diceva alle elementari);
- va prima provato che tale operazione abbia senso, ad esempio
  * Somma di due forze: $\vec{F}_c = \vec{F}_a + \vec{F}_b$: l'effetto di dell'applicazione simultanea di $\vec{F}_a$ e $\vec{F}_b$ è esattamenta uguale a quella di $\vec{F}_c$ se le due forze sono applicate ad un punto materiale. L'effetto è un più complicato se le forze sono applicate ad un corpo esteso.

* Somma di due velocità: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_3$ ha senso se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ hanno un significato ben preciso e se le velocità sono molto piccole rispetto a quella della luce (trasformazione Galileiana delle velocità, vedi nel seguito.). Se invece le velocità sono confrontabili con quella della luce tale formula di somma non è applicabile ($\rightarrow$ teoria della relatività ristretta di Einstein, della quale ricorre il centenario).

Trasformazione galileiana delle velocità, con esempi del tapis roulant e del nuotatore sul fiume. In genere, se un corpo si muove con $\vec{v}$ nel sistema di riferimento S, e il sistema di riferimento si muove rispetto a S' con velocità costante $\vec{v}(S)$:

$$\vec{v}' = \vec{v}(S) + \vec{v} \tag{63}$$
$$\vec{a}' = \vec{a}\,. \tag{64}$$

Caso del nuotatore sul fiume:

$$\vec{v}_{nR} = \vec{v}_{nF} + \vec{v}_{FR}\,, \tag{65}$$

ove $\vec{v}_{FR}$ è la velocità del fiume rispetto alla riva, $\vec{v}_{nF}$ la velocità del nuotatore rispetto al fiume e $\vec{v}_{nR}$ la velocità del nuotatore rispetto alla riva. Scegliendo opportunamente gli assi abbiamo $\vec{v}_{FR} = (v_F, 0)$, $\vec{v}_{nF} = (v_L, v_T)$ (ove v_L e v_T stanno per velocità longitudinale e trasversale rispetto alla corrente), per cui $\vec{v}_{nR} = (v_F + v_L, v_T)$. Casi elementari sono quando la velocità del nuotatore è solo lungo la corrente o trasverale ad essa.
Problemi:

(a) (Svolto in classe) Un fiume, di larghezza L scorre con velocità v_F. Un nuotatore nuota con velocità v_T su un fiume in direzione trasversale a quella di scorrimento della corrente.
   i. A che velocità si muove rispetto alla riva? (vettore e modulo)
   ii. Trovare l'angolo fra la direzione del moto del nuotatore e quella di scorrimento dell'acqua.
   iii. Quanto tempo impiegherà ad attraversare il fiume?
   iv. Per quanto viene trascinato a valle durante l'attraversamento?

(b) Si immagini una gara di nuoto su un fiume, con le corsie, lunghe 50 m, disposte parallelamente al verso della corrente. Il fiume ha una velocità di 2 m/s. Calcolare il tempo che un centometrista farà sul fiume se nuota ad una velocità tale che in una piscina olimpionica ($2 \times 50\,\mathrm{m}$) avrebbe fatto 60 s netti.

9. **Lunedi 11/4, 14:00-16:00**

Somma delle forze applicate allo stesso punto materiale: $\vec{F}_t = \sum_i \vec{F}_i$. Somma di vettori: $\vec{F}_t = \{F_{t_x} = F_{1_x} + F_{2_x},\ F_{t_y} = F_{1_y} + F_{2_y}\}$ (e così via nel caso 3D). Visualizzazioni geometriche: 'concatenazione di frecce' e regola del parallelogrammo.
Decomposizione di una forza in componenti (tipicamente una ortogonale all'altra). Esempio: forza obliqua applicata ad un punto pateriale poggiato su piano orizzontale: componente normale al piano è bilanciata con la reazione vincolare (normale) del tavolo (finché il tavolo 'regge'): siccome l'accelerazione lungo la verticale è nulla, tale è la somma delle forza applicate. Moto del corpo a seconda dell'attrito e dell'intensità della forza (esperimento qualitativo in classe).

- Corpo fermo: vuol dire che $R_x = -F_x$, ove R_x è pari alla forza di attrito statico. $R_x \leq \mu_s F_N$, ove F_N è la forza normale fra oggetto e tavolo (Att: non sempre F_N è semplicemente 'mg': $\rightarrow$ experimento in classe con tavolette; esempio del rotor, aircraft e levitazione magnetica).
- Corpo in movimento (supponendo attrito) $\rightarrow$ attrito dinamico: $R_x = -\mu_d F_N \hat{v}$. Forza totale sul piano: $F_x - \mu_d F_N \hat{v}$.

Piano inclinato: si ruota il problema precedente; si analizza il moto lungo il piano inclinato (invece del solito sistema di riferimento con la x orizzontale e y, ovvero z, verticale). [Nota: spesso per risolvere un problema è importante prenderlo per il verso 'giusto'.].
Decomposizione della forza di gravità:

$$F_T = mg\sin\theta \tag{66}$$
$$F_N = mg\cos\theta\,, \tag{67}$$

ove θ è l'angolo fra piano inlinato e piano orizzontale, F_T è la componente della forza peso lungo il piano inclinato ('T' sta per tangenziale; F_T è presa positiva nel verso che fa scendere il corpo) e F_N è la componente normale al piano inclinato. (Per ricordarsi dove ci vuole il seno e dove il coseno si pensi ai casi limite $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$.).
Analisi del problema, sotto diverse ipotesi e condizioni

0) Un'ipotesi sempre valida nei problemi didattici è che il piano inclinato non si fletta né si sfondi: $\rightarrow$ $\vec{F}_N$ è bilanciata esattamente dalla reazione vincolare $\vec{R}_N$.
1) Mancanza di attrito: la sola forza lungo il piano inclinato è $F_x = F_T = mg\sin\theta$ (avendo ridefinito l'asse x a scendere lungo il piano inclinato), ovvero $a_x = g\sin\theta$: moto uniformemente accelerato con accelerazione ridotta (nota storica sugli esperimenti di Galileo e l'importanza del piano inclinato per lavorare con $a_x < g$).

Nota: nel caso di piano privo di attrito le forze normali al piano inclinate possono essere 'dimenticate' ai fini dello studio della cinematica del corpo sul piano inclinato.

2) Attrito: anche se l'oggetto non ha accelerazioni normali al piano, $\vec{F}_N$ ritorna in gioco in quanto da essa dipendono le forze di attrito.

   a) Il corpo sta fermo (nonostante $\theta > 0$): $\rightarrow$ attrito statico. Il corpo non si muove finché $mg \sin\theta < \mu_s mg \cos\theta$. All'aumentare di θ (vedi esperimento in aula) la componente tangenziale della forza peso aumenta, mentre diminuisce il massimo della forza di attrito statico. Angolo limite $\tan\theta = \mu_s$.

   b) Corpo in movimento: $\rightarrow$ attrito dinamico. $F_x = mg \sin\theta - \mu_d mg \cos\theta\, \hat{v}$, ovvero $a_x = g \sin\theta - \mu_d g \cos\theta\, \hat{v}$. Il fatto che $mg \sin\theta$ sia sempre positiva (per normali piani inlinati con $0 \leq \theta\pi/2$), mentre la forza di attrito è sempre opposta al verso del moto, porta ai due sottocasi:

      - Corpo scende: $F_x = mg \sin\theta - \mu_d mg \cos\theta$ e $a_x = g \sin\theta - \mu_d g \cos\theta$.
      - Corpo sale (attenzione: con la convenzione che stiamo usando si muove nel verso delle x decrescenti): $F_x = mg \sin\theta + \mu_d mg \cos\theta$ e $a_x = g \sin\theta + \mu_d g \cos\theta$. Ovviamente, affinché il corpo possa salire nonostante che entrambe le forze tendano a farlo scendere significa che l'oggetto era stato lanciato lungo il piano inclinato.
        Nota, in questo caso, può essere conveniante definire il verso positivo delle x a salire e quindi la forza totale sarà $F_x = -mg \sin\theta - \mu_d mg \cos\theta$ e quindi $a_x = -g \sin\theta - \mu_d g \cos\theta$, per rendere evidente che il moto è decelerato.

Problemini

(a) Date due forze, espresse in Newton, $F_1 = \{2, -1, 3\}$ e $F_2 = \{1, 2, 1\}$, determinare le intensità delle due forze e della loro risultante.

(b) Date due forze, espresse in Newton, $F_1 = \{2, -1\}$ e $F_2 = \{2, 2\}$, trovare per via grafica l'intensità della forza risultante.

(c) Un corpo sta fermo su una tavola di legno finché l'angolo fra la tavola e il piano orizzontale si mantiene inferiore a 20 gradi. i) trovare il coefficiente di attrito statico μ_s; 2) Calcolare quanto vale la forza dovuta all'attrito statico quando la tavola è inclinata di 10 gradi.

(d) Assumendo un coefficiente di attrito statico di 0.1, determinare la frequenza minima (in giri al minuto) a cui deve ruotare un rotor del diametro di 5 metri affinché una persona resti attaccata alla parete quando il pavimento viene rimosso.

(e) Un oggetto viene lanciato con velocità iniziale di 10 m/s su un piano inclinato di $\theta = 30^o$ e avente un coefficiente di attrito dinamico (per quell'oggetto) di $\mu_d = 0.3$. Determinare la quota massima, rispetto al piano orizzontale, al quale arriva l'oggetto.

(f) Un corpo è posto a riposo al centro di una tavola orizzontale lunga 2 metri. Si conoscono i coefficienti di attrito corpo-piano: $\mu_s = 0.8$ e $\mu_d = 0.5$. La tavola viene gradualmente inclinata finché il corpo non comincia muoversi, quindi l'inclinazione rimane costante. Trovare: a) angolo massimo di inclinazione; b) tempo che il corpo impiega a raggiungere il bordo della tavola.

Esercitazione (seconda ora) su vecchi problemi sospesi.

10. **Giovedi 14/4, 18:00-19:00**

Di nuovo **molla** (portata in aula). Se la lunghezza iniziale era L_0 e aggiungo una massa $m \rightarrow$ posizione di equilibrio L_{eq}, tale che forza elastica bilancia forza di gravità. Con riferimento verso il vasso:

$$mg - k\,(L_{eq} - L_0) \;\;=\;\; 0\,. \tag{68}$$

Per una generica posizione $L = L_{eq} + x$

$$\begin{aligned} F_x &= mg - k\,(L - L_0) = mg - k\,(L_{eq} + x - L_0) && (69)\\ &= mg - k\,(L_{eq} - L_0) - k\,x && (70)\\ F_x(x) &= -k\,x\,. && (71) \end{aligned}$$

Ricordando "$F = m\,a$", otteniamo $a_x(x) = -(k/m)\,x$, ovvero

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2} \;\;=\;\; -\frac{k}{m}\,x\,. \tag{72}$$

Ricorda qualcosa?

Pozzo per il centro della Terra. Forza gravitazionali fra corpi non puntiformi: $\vec{F} = \sum_i F_i = \sum_i \frac{G\,\mu_i\,m}{r_i^2}\hat{r}_i$ (se m è di un corpo puntiforme). Attrazione gravitazionale fra una massa distribuita uniformemente sulla superficie di una sfera e un punto materiale interno o esterno ad essa (consequenze del teorema di Gauss: dimostrato a lezione che gusci sferici aventi densità di massa uniforme non producono alcuna forza su masse all'interno di essi). Applicazione al problema del 'pozzo per il centro della Terra': forza gravitazionale in funzione della distanza r dal centro della terra r:

$$\begin{aligned} F(r) &= -\frac{G\,M(r)\,m}{r^2} && (73)\\ &= -\frac{G\,\rho\,V(r)\,m}{r^2} && (74)\\ &= -\frac{G\,\rho\,4/3\,\pi\,r^3\,m}{r^2} && (75)\\ &= -4/3\,\pi G\,\rho\,m\,r, && (76) \end{aligned}$$

ove ρ indica la densità della terra ($5.5\,10^3\,\mathrm{kg/m^3}$). Da "$F = m\,a$" segue l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\,t^2} &= -\frac{4}{3}\,\pi\rho\,G\,r & (77)\\ \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\,t^2} &= -\frac{g}{R_T}\,r\,, & (78)\end{aligned}$$

ove l'ultima espressione è stata ottenuta ricordandoci che $a_r(r = R_T) = \mathrm{d}^2 r/\mathrm{d}\,t^2(r = R_T) = -g = -\frac{4}{3}\,\pi\rho\,G\,R_T$ (bastava anche semplicemente pensare che l'accelerazione è lineare in r e per $r = R_T$ sappiamo che vale $-g$).

Moto del **pendolo**: massa m legata ad un punto da un filo inestensibile di lunghezza l e massa trascurabile. Coordinata curvilinea s lungo la circonferenza, con $s = 0$ in corrispondenza della verticale e verso positivo quando l'angolo θ è "a destra". Scomposizione delle forze:

$$\begin{aligned} m\,g\cos\theta &\Rightarrow \text{compensata dalla tensione del filo} & (79)\\ -m\,g\sin\theta &\Rightarrow \text{forza tangente} \Rightarrow \text{moto di}\, m. & (80)\end{aligned}$$

Di nuovo, da "$F = m\,a$", segue

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\,t^2} &= -g\,\sin\theta & (81)\\ l\frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}\,t^2} &= -g\,\sin\theta & (82)\\ \frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}\,t^2} &= -\frac{g}{l}\,\sin\theta, & (83)\end{aligned}$$

ove abbiamo usato la relazione $s = l\,\theta$ (che deriva dalla definizione di radiante: $\theta = s/l$). Nell'approssimazione di piccoli angoli ($\theta \ll 1$, con θ espresso in radianti): $\sin\theta \approx \theta$, ove l'approssimazione si intende valida per $\theta \lessapprox 0.1$, ovvero $\lessapprox 5$ gradi:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}\,t^2} \approx -\frac{g}{l}\,\theta\,. \qquad (84)$$

Cosa ci ricordano le relazioni (72), (78) e (84): $\rightarrow$ vedi lezione su moto circolare uniforme:

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\,t^2} = -K\,z\,, \qquad (85)$$

ove z è una generica variabile dipendente dal tempo, ovvero $z(t)$.

Problema: come risalire alle equazioni del moto dei tre casi, ovvero $x(t)$, $r(t)$ e $\theta(t)$ dalle equazioni (72), (78) e (84)?

11. $\boxed{\textbf{Venerdi 15/4, 14:00-16:00}}$

Riprendiamo la (85), ove K è una costante positiva e vale k/m, $4/3\,\pi\,G\,\rho = g/R_T$ o g/l a seconda dei problemi. *Equazione differenziale*: la soluzione non è un numero (o più numeri) come nelle normali equazioni (algebriche), ma una funzione.

Studiando il moto circolare uniforme avevamo già incontrato la (85), come condizione fra l'accelerazione delle proiezioni del moto circolare e le proiezioni stesse. Quindi, riscrivendo in modo generale la (85) come

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\,t^2} = -\omega^2\,z \tag{86}$$

rendiamo esplicito il fatto che K debba essere positivo, e lo ridenomianiamo ω^2.

Check dimensionale su ω: i due termini della (86) devono essere omogenei e, avendo il termine a sinistra le dimensioni di z diviso un tempo al quadrato, ω deve avere le dimensioni dell'inverso del tempo (ovvero espresso in s^{-1} nel SI).

Equazioni differenziali e differenza concettuale rispetto alle ordinarie equazioni algebriche.

Confrontando con la (49) otteniamo direttamente la generica soluzione, che riscriviamo per comodità:

$$z(t) = A\,\cos(\omega t + \phi) \tag{87}$$

Si tratta solo di capire quanto valgono le costanti A e ϕ che compaiono nella (87): essendo due incognite abbiamo bisogno di due *condizioni* (lèggi 'equazioni'): in genere $z(t=0)$ e $\dot{z}(t=0)$, ovvero coordinata e velocità iniziali.

$$z(t=0) \;=\; A\,\cos\phi \tag{88}$$
$$\dot{z}(t=0) \;=\; -A\,\omega\,\sin\phi\,. \tag{89}$$

Se scegliamo, per comodità, $t=0$ nella posizione in cui z ha il valore massimo e quindi la velocità è nulla, otteniamo semplicemente

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_{max} & = & A\,\cos\phi \\ 0 & = & -A\,\omega\,\sin\phi \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \phi & = & 0 \\ A & = & z_{max} \end{array}\right. \tag{90}$$

ovvero

$$z(t) \;=\; z_{max}\,\cos(\omega\,t) \tag{91}$$
$$\dot{z}(t)\,[= v_z(t)] \;=\; -\omega z_{max}\,\sin(\omega\,t) \tag{92}$$

ove

- z_{max} sta, nei tre problemi, per: scostamento massimo del pesetto dalla posizione di equilibrio della molla; raggio della Terra; angolo massimo del pendolo;

– mentre ω vale, rispettivamente per i tre problemi, $\sqrt{k/m}$ $\sqrt{g/R_T}$ e $\sqrt{g/l}$.

Significato di ω: in questi problemi non è una velocità angolare: nei primi due problemi non ci sono angoli; nel terzo c'è un angolo, θ, la velocità angolare associata al quale vale però $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = -\omega\,\theta_{max}\sin(\omega\,t)$.
Notiamo che ω è comunque legato al periodo in quanto, sapendo che $\cos(2\,\pi) = \cos(0)$ e l'argomento $2\,\pi$ della funzione coseno si ottiene quando $t = 2\,\pi/\omega \rightarrow$ *periodo* $T = 2\,\pi/\omega$. Ne segue: *frequenza* $\nu = 1/T = \omega/2\,\pi$, mentre ω ha, in questo contesto, il nome di *pulsazione*.
Oscillatore armonico: si intende moto sinusoidale e si ha luogo ogni qual volta è soddisfatta la (86).
Formula del periodo T nei tre problemi che stiamo studiando: $2\,\pi/\sqrt{m/k}$; $2\,\pi/\sqrt{4/3\,\pi\,\rho\,G} = 2\,\pi/\sqrt{R_T/g}$; $2\,\pi/\sqrt{l/g}$. Si noti come nel secondo e terzo caso il periodo non dipende dalla massa (solita storia di massa inerziale e gravitazionale che si semplificano). Si noti inoltre come nei tre problemi il periodo non dipende dall'ampiezza dell'oscillazione [si ricordi nel caso del pendolo il risultato è solo approssimativo e dipende dalla validità dell'approssimazione $\sin\theta \approx \theta$: vedi sul sito come risolvere numericamente il problema anche nel caso generale. Si noti inoltre come la formula $T = 2\pi/\sqrt{R_T/g}$ potrebbe trarre in inganno e far pensare che il periodo dipende da R_T: in realtà g è quello sulla superficie terrestre, ovvero andrebbe indicato con $g(R_T)$: esso dipende linearmente da R_T, in quanto $g(R_T) = 4/3\,\pi\,\rho\,G\,R_T$, e quindi $R_T/g(R_T)$ non dipende da R_T].
Problemini:

(a) Un molla si allunga di 10 cm se si applica una foeza di 10 N. Calcolare la costante elastica della molla e il periodo di oscillazione se ad essa si appende una massa di 1 kg.

(b) Assumendo che l'oscillazione massima del problema precedente sia di 2 cm, calcolare la velocità massima dell'oggetto appeso alla molla.

(c) Calcolare il periodo di oscillazione del problema del sasso nel pozzo per il centro della Terra e la velocità massima del sasso.

(d) Si immagini un satellite in orbita circolare 'al pelo della superficie terrestre' (anche se impossibile in pratica). Trovare il periodo di rotazione del satellite e confrontare la solutione con quella del problema precedente.

(e) Un pendolo ha periodo di un secondo. Si immagini di trasportarlo su un altro pianeta avente stesso raggio della Terra e densità dimezzata. Trovare il periodo di del pendolo su tale pianeta.

Uso di **integrali** della cinematica, con esercizi. Immaginiamo di conoscere la funzione con la quale l'accelerazione cambia con il tempo: $a(t)$, ad esempio $a(t) = \alpha + \beta\,t + \gamma\,t^2$, ove $\alpha = 3\,\mathrm{m/s^2}$, $\beta = -2\,\mathrm{m/s^3}$, $\gamma = 1\,\mathrm{m/s^3}$, dalle condizioni iniziali $x_0 = x(t=0) = 10\,\mathrm{m}$ e $v_0 = v(t=0) = -1\,\mathrm{m/s}$. Siamo interessati a calcolare $v(t)$ e $x(t)$. Ricordiamo quanto visto nelle prime lezioni:

$$\begin{aligned}
\Delta v|_{t_1}^{t_2} &= \sum_i a_i\,\Delta t_i && (93)\\
&\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,\mathrm{d}t && (94)\\
v(t_2)-v(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,\mathrm{d}t && (95)\\
v(t_2) &= v(t_1)+\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,\mathrm{d}t\,. && (96)
\end{aligned}$$

Se $t_1=0$, $t_2=t$ e indichiamo $v(t=0)$ con v_0:

$$v(t) = v_0+\int_0^t a(t')\,\mathrm{d}t'\,. \tag{97}$$

Analogalmente per $x(t)$:

$$x(t_2) = x(t_1)+\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t \tag{98}$$

e

$$x(t) = x_0+\int_0^t v(t')\,\mathrm{d}t'\,. \tag{99}$$

Nel caso dell'esempio $a(t)=\alpha+\beta\,t+\gamma\,t^2$:

$$\begin{aligned}
v(t) &= v_0+\alpha\,t+\frac{\beta}{2}\,t^2+\frac{\gamma}{3}\,t^3 && (100)\\
x(t) &= x_0+v_0\,t+\frac{\alpha}{2}\,t^2+\frac{\beta}{6}\,t^3+\frac{\gamma}{12}\,t^4\,. && (101)
\end{aligned}$$

Se $\beta=0$ e $\gamma=0$ riotteniamo le ben note formule del moto uniformemente accelerato.
Infine, se abbiamo $\vec{a}(t)$, basta applicare questi ragionamente a ciascuna componente. Se poi abbiamo $\vec{F}(t)$, basta ottenere $\vec{a}(t)=\vec{F}(t)/m$ e ricondursi al caso precedente.

12. $\boxed{\textbf{Lunedi 18/4, 14:00-16:00}}$

Nota sulla molla. Sia essa posta verticalmente che orizzontalmente la forza è sempre $-k\,x$, ove x rappresenta la posizione dal punto di equilibrio. Nel caso di molla disposta orizzontalmente si assume che essa possa possa sia allungarsi che accorciarsi rispetto alla lubghezza 'a riposo' (senza flettersi, in questo secondo caso). Nel caso di molla disposta verticalmente la massa sospesa termina il punto di equilibrio, rispetto al quale la lunga si allunga di più o di meno (ovvero si accorcia): non c'e' quindi una vera contrazione rispetto alla molla 'a riposo', né c'è quindi la possibilità di flessione (che comunque non si prende mai in considerazione nel problemi didattici).

Caduta in campo gravitazionale con resistenza del mezzo tipo $-\beta\vec{v}$, ove β è una costante misurata in N/(m/s), ovvero in kg/s. Caso unidimensionale con verso positivo diretto verso il basso:

$$\begin{aligned} F_{tot} &= m\,g - \beta\,v & (102)\\ m\,a &= m\,g - \beta\,v & (103)\\ m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= m\,g - \beta\,v & (104)\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g - \frac{\beta}{m}\,v & (105)\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{\beta}{m}\left(\frac{m\,g}{\beta} - v\right). & (106) \end{aligned}$$

Dall'analisi dimensionale scopriamo che mg/β è una velocità (in quanto deve essere omogenea con v per potersi sommare algebricamente ad essa, e comunque si può ricavare facilmente dalle dimensioni di m di g e di β), mentre m/β ha le dimensioni di un tempo ($\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ è una velocità diviso un tempo). Per comodità chiamiamo quindi $v_f = mg/\beta$ (vedremo nel seguito il motivo della 'f' in v_f) e $\tau = m/\beta$, e riscriviamo l'equazione differenziale come

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau}\,(v_f - v)\,. \tag{107}$$

(Se invece della forza mg il corpo è sottoposto alla generica forza f, si arriva alla stessa equazione, ove τ vale sempre m/β, mentre $v_f = f/\beta$).

L'equazione differenziale (107) può essere risolta per 'separazione di variabili', una tecnica che consiste nel riportare al primo membro quello che dipende solo da una variabile (per es. v, in questo caso) e al secondo membro quello che dipende solo dall'altra (t nel nostro caso):

$$\frac{\mathrm{d}v}{v - v_f} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau} \tag{108}$$

$$\begin{aligned}
\int_{v_0=v(t=0)}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}v}{v-v_f} &= \int_{t=0}^{t} -\frac{\mathrm{d}t'}{\tau} && (109)\\
\ln\frac{v(t)-v_f}{v_0-v_f} &= -\frac{t}{\tau} && (110)\\
v(t)-v_f &= (v_0-v_f)\,e^{-t/\tau} && (111)\\
v(t) &= v_f+(v_0-v_f)\,e^{-t/\tau}\,. && (112)
\end{aligned}$$

v_f acquista quindi il significato di velocità (asintotica) finale, in quanto $v(\infty)=v_f$. La costante τ è invece legata alla rapidità del fenomeno: minore è τ, più rapidamente v tende a v_f (ma si noti come, matematicamente, v_f viene raggiunta solo nel limite $t\to\infty$). Quando $t=\tau$,

$$v(\tau)-v_f \;=\; \frac{1}{e}\,(v_0-v_f) \;\approx\; 0.37\,(v_0-v_f) \qquad (113)$$

la differenza di velocità rispetto al valore asintotico si è ridotto del 37% di quella iniziale. Per $t=2\,\tau,\ 3\,\tau, 4\,\tau$ e $5\,\tau$ la velocità differisce da quella asintotica rispettivamente del 14%, 5%, 1.8% e 0.7% (ovvero dopo $5\,\tau$ la velocità del corpo è 'praticamente uguale' a quella asintotica).
Si noti come v_f e τ non dipendono dal fatto che v_0 sia maggiore di v_f (paracadutista al momento che apre il paracadute) o minore di v_f (paracadutista prima di aprire il paracadute): quella che ovviamente sarà diversa è la forma della funzione $v(t)$.
Nota: dalla $v(t)$ si può calcolare facilmente $a(t)$ (vedi esercizio) e, in principio, risalire a $x(t)$ (quest'ultimo fuori programma, ma concettualmente facile numericamente).
Problemini

(a) Una goccia d'acqua di 20 mg arriva al suolo con una velocità di 20 m/s. Calcolare il coefficiente β.

(b) Sul problema precedente. Assumendo che la goccia era inizialmente in quiete, si calcoli quanto ha impiegato per raggiungere la velocità di 10 m/s.

(c) Dalla (112) si ricavi $a(t)$.

(d) Sapendo che un paracadutista di 100 kg atterra ad una velocità di 10 m/s si ricavi l'accelerazione e la forza da lui subita all'apertura del paracadute, assumendo che il fenomeno di apertura sia istantaneo (dalla soluzione del problema si capirà come tale assunzione non sia realistica).

Altri processi descritti da equazioni differenziali simili:

A) Si assuma che la frazione di nuclei che decadono nell'unità di tempo sia α. Si determini l'andamendo del numero di nuclei nel tempo ed il tempo di dimezzamento.

B) Si pensi ad una colonia di batteri. Si assuma che ad ogni istante l'incremento o decremento del numero di individui in un 'piccolo' intervallo di tempo sia proporzionale al numero di individui vivi in quell'istante. Ricavarsi la legge con cui varia la popolazione nel tempo.

Esercitazioni (seconda ora).

13. **Giovedi 21/4, 18:00-19:00**

Dalla lezione precedente:

A) Si assuma che la frazione di nuclei che decadono nell'unità di tempo sia r. Si determini l'andamento del numero di nuclei nel tempo ed il tempo di dimezzamento.

$$\frac{\mathrm{d}n/n}{\mathrm{d}t} = -r \tag{114}$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = -r\,\mathrm{d}t\,, \tag{115}$$

riconoscendo in r l'inverso della costante di tempo τ incontrata precedentemente. Ne segue,

$$\int_{n_0=n(t=0)}^{n(t)} \frac{\mathrm{d}n}{n} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t \mathrm{d}t' \tag{116}$$

$$\ln n\Big|_{n_0=n(t=0)}^{n(t)} = -\frac{1}{\tau}\,t'\Big|_0^t \tag{117}$$

$$\ln\frac{n(t)}{n_0} = -\frac{t}{\tau} \tag{118}$$

$$n(t) = n_0\,e^{-t/\tau}\,. \tag{119}$$

La condizione $n(t)/n_0 = 1/2$, che definisce il tempo di dimezzamento, dà $1/2 = \exp\left[-t_{1/2}/\tau\right]$, da cui $t_{1/2} = \tau\,\ln 2$. (Nei decadimenti τ è chiamato 'vita media').

B) Si pensi ad una colonia di batteri. Si assuma che ad ogni istante l'incremento o decremento del numero di individui in un 'piccolo' intervallo di tempo sia proporzionale al numero di individui vivi in quell'istante. Ricavarsi la legge con cui varia la popolazione nel tempo.
$\rightarrow$ $\Delta n \propto n\Delta t$, ovvero $\Delta n/\Delta t \propto n$. Passando ai differenziali (ovvero nel limite $\Delta t \rightarrow 0$), chiamando con α la costante di proporzionalità (positiva o negativa a seconda che si tratti di incremento o decremento) e ripetendo quando fatto nel caso precedente:

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = \alpha\,\mathrm{d}t \tag{120}$$

$$n(t) = n_0\,e^{\alpha\,t}\,. \tag{121}$$

$\alpha = (\mathrm{d}n/n)/\mathrm{d}t$ può essere visto come il tasso istantaneo di incremento o decremento: $\rightarrow$ crescite e decrescite esponenziali.
Problema simile: aumento/diminuzione di capitale nel limite di ricapitalizzazione continua.

Riepilogo equazioni differenziali:

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\,t^2} = -\omega^2\, z \;\;\Rightarrow\;\; \text{osc. armonico:} \rightarrow z(t) = A\cos\left(\omega\, t + \phi\right) \tag{122}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau}\left(z_f - z\right) \;\;\Rightarrow\;\; \text{esponenziale:} \rightarrow z(t) = z_f + \left(z_0 - z_f\right) e^{-t/\tau}\,. \tag{123}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \alpha\, z \;\;\Rightarrow\;\; \text{esponenziale:} \rightarrow z(t) = z_0\, e^{\alpha\, t}\,. \tag{124}$$

[Se nell'ultimo caso α è negativa: esponenziale descrescente con $\tau = -\alpha$: $z(t) = z_0\, e^{-t/\tau}$.]
Nota: e se $\mathrm{d}^2 z/\mathrm{d}\,t^2 = +k\, z$? $\Rightarrow$ soluzione 'esplosiva': più cresce z maggiore è la forza (repulsiva) che la fa crescre ancora di più.

Problema del cannoncino di massa M che spara proiettile di massa m. Schematizziamo la spinta del proiettile come una forza costante che agisce in un intervallo Δt. Riscriviamo "$F = m\, a$":

$$\begin{aligned} F &= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} && (125)\\ &= \frac{\mathrm{d}(m\, v)}{\mathrm{d}t} && (126)\\ &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} && (127) \end{aligned}$$

avendo chiamato indicato $p = m\, v$ la *quantità di moto* dell'oggetto di massa m (in generale $\vec{p} = m\vec{v}$). Se F è costante segue

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p} &= \vec{F}\,\Delta t && (128)\\ \vec{p}(t_2) &= \vec{p}(t_1) + \vec{F}\times(t_2 - t_1) \quad (F \text{ costante})\,. && (129) \end{aligned}$$

La quantità "$\vec{F}\,\Delta t$", per $\vec{F}$ costante in Δt, è chiamata *impulso della forza*: $\rightarrow$ causa variazione di quantità di moto. Ne segue, per la velocità

$$\begin{aligned} \Delta\vec{v} &= \frac{1}{m}\vec{F}\,\Delta t && (130)\\ \vec{v}(t_2) &= \vec{v}(t_1) + \frac{1}{m}\vec{F}\times(t_2 - t_1) \quad (F \text{ costante})\,. && (131) \end{aligned}$$

Abbiamo trovato un modo semplice per ricavarsi la quantità di moto (e quindi la velocità del proiettile). Ancora due problemi: a) cosa succede se la forza

varia nel tempo? b) cosa succede al cannoncino?
a) Se $\vec{F}$ varia con il tempo, ovvero abbiamo $\vec{F}(t)$, in analogia a quanto visto per le variazioni di posizione e velocità:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{p}\big|_{t_1}^{t_2} &= \sum_i \Delta\vec{p}_i = \sum_i \vec{F}_i \Delta t_i && (132)\\ &\to \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t\,, && (133)\end{aligned}$$

che definisce l'impulso di una forza anche per forze variabili con il tempo.
b) Principio di azione e reazione (terzo principio della meccanica): forze uguali e contrarie:

$$\vec{F}_A^{(B)} = -\vec{F}_B^{(A)}\,, \qquad (134)$$

ove $\vec{F}_A^{(B)}$ sta per "forza su A dovuta a B", e analogo per $\vec{F}_B^{(A)}$. Analizziamo le variazioni di quantità di moto di A e B:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{p}_A^{(B)}\Big|_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A^{(B)}(t)\mathrm{d}t && (135)\\ &= -\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B^{(A)}(t)\mathrm{d}t && (136)\\ &= -\,\Delta\vec{p}_B^{(A)}\Big|_{t_1}^{t_2} && (137)\end{aligned}$$

ovvero

$$\Delta\vec{p}_A^{(B)}\Big|_{t_1}^{t_2} + \Delta\vec{p}_B^{(A)}\Big|_{t_1}^{t_2} = 0\,. \qquad (138)$$

In una interazione fra due corpi la quantità di moto viene scambiata da un corpo all'altro. Se il sistema fisico è formato soltanto da due corpi (ovvero essi non hanno, almeno approssimativamente, interazioni con il resto del mondo), la loro *quantità di moto totale si conserva*.
Si noti come l'espressione di sopra sia in effetti vettoriale: la conservazione si applica alle tre componenti: se le interazioni con 'il resto del mondo' avviene soltanto in una o due delle componenti, la conservazione vale nelle rimanenti. Si noti inoltre come, per arrivare all'espressione di conservazione si è assunto che il principio di azione e reazione valga istantante per istante.

Quantità di moto del cannoncino:

- posto su piano senza attrito, e coordinata x orizzontale, positiva nella direzione di moto del proiettile:
  - lungo x i due oggetti sono soggetti soltanto alla loro forza reciproca: $\to$ sistema isolato $\to$ p_x si conserva (chiamiamolo semplicemente p).

Essendo proiettile e cannone inizialmente fermi

$$
\begin{aligned}
p_1 + p_2 &= 0 && (139)\\
p_2 &= -p_1 && (140)\\
M\, v_2 &= -m\, v_1 && (141)\\
v_2 &= -\frac{m}{M}\, v_1 && (142)
\end{aligned}
$$

* ∗ lungo la componente verticale la risultante delle forze è nulla: il moto di proiettile e cannoncino si mantiene sull'asse x.

– ancorato saldamente al terreno: in pratica il cannoncino è solidale con il terreno e quindi, con buona approssimazione, con la Terra (a meno che l'esplosione sia talmente potente da sollevare la piattaforma sulla quale il connoncino era ancorato. . .): in pratica si considera che cannoncino e Terra formino un solo corpo di massa 'infinita' rispetto al proiettile: $m/M \to 0$: il cannoncino non si sposta (ma il sistema cannoncino-Terra acquista la quantità di moto $-m\, v_1$: un oggetto di massa 'infinita' può variare la sua quantità di moto senza (apprezzabilmente) variare la sua velocità.
  Esempio di persona che saltella: la Terra varia continuamente la propria quantità di moto senza subire spostamenti.

Conservazione della quantità di moto: caso generale.
Se abbiamo un sistema isolato di oggetti, ovvero tali che essi interagiscono solo con gli altri oggetti di tale sistema, ma non con il resto del mondo, per ogni intervallo di tempo dt possiamo estendere la (138) a tutte le coppie ij, ovvero

$$
\mathrm{d}\vec{p}_i^{\,(j)} + \mathrm{d}\vec{p}_j^{\,(i)} = 0\,. \qquad (143)
$$

Ne risulta che, istante per istante, è nulla la variazione della quantità di moto totale del sistema $\mathrm{d}\vec{p} = \sum_{i,\,j} \mathrm{d}\vec{p}_i^{\,(j)}$.

Sistema isolato:

$$
\begin{aligned}
&\rightarrow\ \mathrm{d}\vec{p} = 0 && (144)\\
&\rightarrow\ \vec{p}(t) = \textit{costante.} && (145)\\
& && (146)
\end{aligned}
$$

Altri esempi: persona inizialmente ferma su laghetto ghiacciato che riesce a muoversi lanciando un oggetto; razzo nel vuoto che accelera 'spruzzando' del gas (o altro) ad alta velocità; Terra che 'assorbe' le variazioni di quantità di moto di quanti saltellano sulla terra.

14. $\boxed{\textbf{Venerdi 22/4, 14:00-16:00}}$

Conservazione della quantità di moto ed esercizi tipici (vedi lezioni precedente). Digressione su attrito statico (in contrapposizione a situazione di persona su piano senza attrito) e applicazioni automobilistiche: importanza della trazione posteriore e dei freni anteriori.

Sistema isolato. La quantità di moto totale di un sistema isolato si conserva: $\vec{p}_{tot}(t) = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i(t) = cost.$ (sono tre condizioni: $p_{x_{tot}}$, $p_{y_{tot}}$ e $p_{z_{tot}}$).
Centro di massa del sistema (media pesata delle posizioni):

$$\begin{aligned} x_{CM}(t) &= \frac{\sum_i m_i x_i(t)}{\sum_i m_i} && (147)\\ v_{x_{CM}}(t) &= \frac{\mathrm{d}x_{CM}(t)}{\mathrm{d}t} && (148)\\ &= \frac{\sum_i m_i \,\mathrm{d}x_i(t)/\mathrm{d}t}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i v_{x_i}(t)}{\sum_i m_i} = \frac{p_{x_{tot}}(t)}{M_{tot}} && (149)\end{aligned}$$

etc. per y e z

$$\vec{v}_{CM}(t) = \frac{\vec{p}_{tot}(t)}{M_{tot}}\,. \qquad (150)$$

Sistema isolato: $\vec{p}_{tot}$ costante: $\rightarrow \vec{v}_{CM}$ costante.
Esempi: urto auto ($m_1 = 1000\,\mathrm{kg}$) e camion ($m_1 = 10000\,\mathrm{kg}$), trascurando attriti ed assumendo rimangano attaccati: casi $v_1 = 50\,\mathrm{km/h}$ e $v_2 = 0$ e velocità scambiate: $\rightarrow \Delta v$ per i due mezzi nei due casi (ma nota: le forze che subiscono le persone dipendono da accelerazioni, $\Delta v/\Delta t$: importanza di 'attutire' l'urto, ovvero aumentare Δt).

Lavoro, energia cinetica ed energia potenziale.
Definizione del **lavoro** in caso *unidimensionale* e per forza costante: $L = F\,\Delta s$ ("forza per spostamento"). Lavoro nel caso di forza che dipende dalla posizione: $L = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n F_i \Delta_{x_i}$ e limite ($n \rightarrow \infty$; $\Delta_{x_i} \rightarrow 0$):

$$L|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad (151)$$

Definizione dell'energia cinetica e connessione al lavoro mediante il cosiddetto teorema dell'energia cinetica (o delle 'forze vive'), consequenza di "$F = m\,a$":

$$\begin{aligned} L|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{x_1}^{x_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x && (152)\\ &= \int_{x_1}^{x_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,v\,\mathrm{d}t && (153)\\ &= \int_{x_1}^{x_2} m\,v\,\mathrm{d}v && (154)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\,m\,v^2\bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}\,m\,v^2(x_2) - \frac{1}{2}\,m\,v^2(x_1) \qquad (155)\\
&= E_c(x_2) - E_c(x_1)\,, \qquad (156)
\end{aligned}
$$

avendo definito $E_c = 1/2\,mv^2$ come **energia cinetica**:

$$
\rightarrow \quad L|_{x_1}^{x_2} \;=\; \Delta E_c|_{x_1}^{x_2}\;. \qquad (157)
$$

Unità di misura del lavoro e dell'energia: Joule = Newton×m, simbolo J.

Esempio 1: lavoro della forza di richiamo dell'oscillatore armonico:

– dalla posizione di equilibrio ($x = 0$) alla generica posizione x:

$$
\begin{aligned}
L|_0^x &= \int_0^x F(x')\,\mathrm{d}x' = \int_0^x (-k\,x')\,\mathrm{d}x' \qquad (158)\\
&= -\frac{1}{2}\,k\,x^2 \qquad (159)
\end{aligned}
$$

→ lavoro negativo (indipendentemente dal segno di x — quello che conta è che forza e spostamento siano discordi): $\Delta E_c < 0$: velocità diminuisce:

$$
\frac{1}{2}m\,v^2(x) \;=\; \frac{1}{2}m\,v^2(0) - \frac{1}{2}\,k\,x^2\,; \qquad (160)
$$

– dalla generica posizione x alla posizione di equilibrio ($x = 0$):

$$
\begin{aligned}
L|_x^0 &= \int_x^0 (-k\,x')\,\mathrm{d}x' \qquad (161)\\
&= \frac{1}{2}\,k\,x^2 \qquad (162)
\end{aligned}
$$

→ lavoro positivo (indipendentemente dal segno di x — quello che conta è che forza e spostamento siano concordi): $\Delta E_c < 0$: velocità aumenta:

$$
\frac{1}{2}m\,v^2(0) \;=\; \frac{1}{2}m\,v^2(x) + \frac{1}{2}\,k\,x^2\,; \qquad (163)
$$

– in particolare, dalla posizione iniziale x_M alla quale la massa m è ferma:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}m\,v^2(0) &= \frac{1}{2}\,k\,x_M^2 \qquad (164)\\
&= \frac{1}{2}\,\omega^2\,m\,x_M^2 \qquad (165)\\
v(0) &= \omega\,x_M\,, \qquad (166)
\end{aligned}
$$

[ritroviamo lo stesso risultato trovato dalla cinematica, ovvero da $x(t) = x_M\,\cos{(\omega\,t)}$].

Si noti inoltre come la somma del lavoro per andare da 0 a x e di quello per andare da x a 0 sia nulla: $L|_0^x + L|_x^0 = 0$.

Esempio 2: lavoro della forza di gravità in prossimità della superficie terrestre, ovvero '$-mg$', con g approssimativamente costante, da una quota iniziale z_1 ad una quota finale z_2

$$L|_{z_1}^{z_2} = \int_{z_1}^{z_2} (-m\,g)\,\mathrm{d}z \tag{167}$$

$$= -m\,g\,(z_2 - z_1) \tag{168}$$

Se $z_2 > z_1$ (il corpo è salito): $L = -m\,g\,h < 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c < 0$.
Se $z_2 < z_1$ (il corpo è disceso): $L = m\,g\,h > 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c > 0$.
(h, definito positivo, è la differenza di quota dal punto più alto al punto più basso.) Anche in questo caso, se il corpo ritorna nella posizione iniziale il lavoro totale è nullo.

Esempio 3: lavoro della forza di gravità, caso generale, da una distanza iniziale R_1 and una distanza finale R_2:

$$L|_{R_1}^{R_2} = \int_{R_1}^{R_2} (-\frac{G\,M\,m}{r^2})\,\mathrm{d}r \tag{169}$$

$$= \left.\frac{G\,M\,m}{r}\right|_{R_1}^{R_2} \tag{170}$$

$$= G\,M\,m\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) : \tag{171}$$

Se $R_2 > R_1$ (m si allontana da M): $L < 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c < 0$.
Se $R_2 < R_1$ (m si avvicina a M): $L > 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c < 0$.
Anche in questo caso, se il corpo ritorna nella posizione iniziale il lavoro totale è nullo.
Lavoro fatto dalla forza gravitazionale per portare un corpo dalla distanza R all'infinito:

$$L|_R^{\infty} = -\frac{G\,M\,m}{R}\,. \tag{172}$$

Se $R = R_T$ questa formula si riduce a $-m\,g\,R_T$.
Problema (velocità di fuga): quanto deve valere v_0 sulla superficie terrestre affinché, in assenza di resistenza dell'aria, un corpo lanciato verso l'alto possa arrivare a 'distanza infinita' con 'velocità nulla'? [R.: $E_c(R = R_T) = 1/2\,m\,v_0^2$, $E_c(R = \infty) = 0$: $\rightarrow$ calcolare ΔE_c ed eguagliarlo con il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale: $\rightarrow$ conti]

Esempio 4: lavoro della forza di attrito mentre il corpo si sposta da x_1 a $x_2 > x_1$ (indicando con d la distanza fra i due punti):

$$L|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (-\mu_D\,F_N)\,\mathrm{d}x \tag{173}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mu_D\, F_N\, (x_2 - x_1) = -\mu_D\, F_N\, d && (174)\\
(&= -\mu_D\, m\, g\, d\ ,\ \text{caso particolare}\ )\,. && (175)
\end{aligned}
$$

Se invertiamo il verso del moto anche la forza cambia segno ($F = -\mu_D\, F_N\, \hat{v}$):

$$
\begin{aligned}
L|_{x_2}^{x_1} &= \int_{x_2}^{x_1} (\mu_D\, F_N)\, \mathrm{d}x && (176)\\
&= \mu_D\, F_N\, (x_1 - x_2) && (177)\\
&= -\mu_D\, F_N\, (x_2 - x_1)\ : && (178)
\end{aligned}
$$

Lavoro sempre negativo: $L|_{x_1}^{x_2} = -\mu_D\, F_N\, d$ se si va da x_1 a x_2 e poi si ritorna a x_1 si sommano i lavori negativi: $\rightarrow L_{tot} = -2, \mu_D\, F_N\, d$.
$\rightarrow$ Discussione sui vantaggi di usare il lavoro invece di risolvere in dettaglio le equazioni del moto.

Problemi:

(a) corpo cade da 10 m: $\rightarrow$ velocità finale;
(b) corpo lanciato verso l'alto con $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$: a che altezza arriva?
(c) corpo lanciato verso l'alto con $v_0 = 30\,\mathrm{m/s}$: velocità quando è salito di 10 dalla posizione iniziale.
(d) velocità di fuga dalla Terra e dalla Luna.
(e) velocità di impatto: si immagini che un oggetto si trovi in quiete 'molto lontano' dalla Terra e che venga poi 'catturato' dalla forza di gravit` terrestre: con quale velocità cade sulla Terra (si trascuri la solita resistenza dell'aria).
(f) Un corpo si massa 100 g, sospeso ad una molla, compie oscillazioni di ampiezza 2 cm con un periodo di 0.1 s. Calcolare la velocità massima del corpo durante le oscillazioni.

Esercitazioni (seconda ora).

15. **Giovedi 28/4, 18:00-19:00**

Sistema di punti materiali interagenti e soggetti a forze reciproche (**interne**) ed **esterne**:

$$
\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_i^{(j)} + \vec{F}_i^{(ext)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_i\,. \tag{179}
$$

Sommando su tutti i punti materiali otteniamo

$$
\begin{aligned}
\sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \vec{F}_i && (180)\\
\frac{\mathrm{d}\sum_i \vec{p}_i}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i,j} \vec{F}_i^{(j)} + \sum_i \vec{F}_i^{(ext)}\,, && (181)
\end{aligned}
$$

ma, per il principio di azione-reazione, le forze interne si annullano a coppie nella sommatoria in quanto $F_i^{(j)} = -F_j^{(i)}$. La variazione nel tempo della quantità di moto totale del sistema è dovuta soltanto alle forze esterne:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext)} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} \tag{182}$$

$$\vec{F}^{(ext)} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \tag{183}$$

$$= M\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{CM}}{\mathrm{d}t} \tag{184}$$

$$= M\,\vec{a}_{CM}\,, \tag{185}$$

ove $\vec{F}^{(ext)}$ è la *risultante* delle forze esterne e M è la somma delle masse del sistema. È come se il CM si comportasse come un punto materiale di massa M (seconda legge della meccanica generalizzata ad un sistema di punti materiali). Segue:

$$L^{(ext)} = \int_A^B F^{(ext)} \cdot \mathrm{d}x = \Delta\left(\frac{1}{2}Mv_{CM}^2\right)\bigg|_A^B : \tag{186}$$

il lavoro fatto dalla risultante delle forze esterne è pari alla variazione di *energia cinetica di traslazione* del CM (nota: il sistema possiede anche energia cinetica dovuta al movimento interno).

In alcuni tipi di forze (molla, gravità, elettrostatica) il lavoro compiuto su un ciclo è nullo. Inoltre, in questi casi si osserva come l'energia cinetica 'sparisca' e poi 'ricompaia' (esempio: lancio di oggetto verso l'alto) in virtù della relazione $L|_{x_1}^{x_2} = \Delta E_c|_{x_1}^{x_2}$. Si ipotizza quindi, per questo tipo di forze, che quando l'energia cinetica 'sparice' (o semplicemente diminuice), essa si trasformi in un altro tipo di energia *meccanica*: **energia potenziale**:

diminuzione di energia cinetica → aumento di energia potenziale

(e viceversa)

$$\Delta E_c|_{x_1}^{x_2} = -\,\Delta E_p|_{x_1}^{x_2} \;\;\Rightarrow\;\; \Delta E_p|_{x_1}^{x_2} = -\,L|_{x_1}^{x_2}\,. \tag{187}$$

La (187) definisce (a meno di una costante) l'energia potenziale. Nota: sia per l'energia cinetica che per l'energia potenziale il lavoro fornisce la variazione dell'energia, ma, mentre per l'energia cinetica esiste uno 'zero naturale', corrispondente ad una velocità nulla, nell'energia potenziale tale 'zero naturale' non sempre esiste. In genere, dato un problema è conveniente fissare lo zero dell'energia potenziale in posizione del suo minimo (in quel problema).

Esempio 1 (molla)

$$\Delta E_p|_0^x = -L|_0^x = \frac{1}{2}\,k\,x^2 \tag{188}$$
$$E_p(x=0)=0 \;\Rightarrow\; E_p(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2\,. \tag{189}$$

Esempio 2 (forza di gravità “-mg”). Se il moto dell’oggetto si svolge da un livello minimo (es. tavolo, pavimento, piano stradale, etc.), conviene prendere tale livello come riferimento per lo zero dell’energia potenziale:

$$\Delta E_p|_0^h = -L|_0^h = m\,g\,h \tag{190}$$
$$E_p(h=0)=0 \;\Rightarrow\; E_p(h) = m\,g\,h\,. \tag{191}$$

Esempio 3 (forza di gravità, caso generale).

$$\Delta E_p|_{R_0}^R = G\,M\,m\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R}\right)\,. \tag{192}$$

Non si può scegliere $R_0=0$, in quanto $\Delta E_p|_{R_0}^R \to \infty\ \forall R$. Si potrebbe scegliere R_0 uguale al raggio del pianeta. Si preferisce scegliere lo zero in corrispondenza di $R_0\to\infty$, ovvero in corrispondenza del suo massimo (idem per forza di Coulomb):

$$E_p(R=\infty)=0 \;\Rightarrow\; E_p(R) = -\frac{G\,M\,m}{R}\ : \tag{193}$$

niente di veramente strano: quello che conta è che, passando da R_1 a R_2 con $R_2>R_1$, si abbia $E_p(R_2)>E_p(R_1)$:

$$\begin{aligned}
\Delta E_p|_{R_1}^{R_2} &= E_p(R_2)-E_p(R_1) && (194)\\
&= -\frac{G\,M\,m}{R_2}-\left(-\frac{G\,M\,m}{R_2}\right) && (195)\\
&= G\,M\,m\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\,. && (196)
\end{aligned}$$

Si noti come questa definizione è compatibile con $E_p(h)=m\,g\,h$, se si pensa che quest’ultima sia valida in prossimità della superficie terrestre, ove le varizioni di g con l’altezza sono trascurabili.
Espansione di $E_p(R)$ intorno a R_T:

$$\begin{aligned}
E_p(R_T+h) &= -\frac{GMm}{R_T+h} && (197)\\
&= -\frac{GMm}{R_T(1+h/R_T)}\times\frac{1-h/R_T}{1-h/R_T} && (198)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{GMm(1-h/R_T)}{R_T(1-(h/R_T)^2)} && (199)\\
&\approx -\frac{GMm(1-h/R_T)}{R_T} = -\frac{GMm}{R_T} + \frac{GMm}{R_T^2}\, h && (200)\\
&\approx E_p(R_T) + mgh && (201)\\
&\approx E_p(R_T) + E_p|_{R_T}(h)\,, && (202)
\end{aligned}
$$

avendo chiamato $E_p|_{R_T}(h) = mgh$ il potenziale rispetto a R_T e avendo trascurato $(h/R_T)^2$ nel passaggio dalla (199) alla (200)

Espressione della forza dalla funzione energia potenziale. Essendo

$$E_p(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\,\mathrm{d}x + \text{costante}\,,$$

segue

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} \tag{203}$$

Si può verificare facilmente come, nei tre casi incontrati, dall'espressione dell'energia potenziale si riottiene la forza:

$$E_p(h) = mgh \quad\Rightarrow\quad F(h) = -\frac{\mathrm{d}E_p(h)}{\mathrm{d}h} = -mg \tag{204}$$

$$E_p(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2 \quad\Rightarrow\quad F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} = -kx \tag{205}$$

$$E_p(R) = -\frac{GMm}{R} \quad\Rightarrow\quad F(R) = -\frac{\mathrm{d}E_p(R)}{\mathrm{d}R} = -\frac{GMm}{R^2} \tag{206}$$

Riepilogo su lavoro e bilancio energia potenziale e potenziale:

- <u>Tutte le forze</u> $\rightarrow$ $L_{tot}|_A^B = \Delta E_c|_A^B$, ove il pedice *tot* indica che si tratta del lavoro fatto dalla risultatnte di tutte le forze che agiscono sul corpo, conservative o non.
- <u>Forze conservative</u> $\rightarrow$ $L_{F^{(i)}_{cons}}\Big|_A^B = -\,\Delta E_p^{(i)}\Big|_A^B$, ove l'indice i indica che la relazione è valida per ciascuna delle forze conservative in gioco
- Se sono presenti solo <u>forze conservative</u>: si conserva l'energia meccanica totale: $E_c + E_p = costante$:

$$E_c(in) + E_p(in) = E_c(fin) + E_p(fin) \tag{207}$$

16. $\boxed{\textbf{Venerdi 29/4, 14:00-16:00}}$

Sommario su lavoro, energia cinetica, energia potenziale, forze conservative e non conservative.

Unità di misura di lavoro ed energia: Joule (J): 1 Joule = $1\,\mathrm{N} \times 1\,\mathrm{m}$; $\mathrm{J} \leftrightarrow \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$.

Esempio di uso della (207) nel caso dell'oscillatore armonico (molla).

Forze non conservative e trasformazione in calore dell'energia meccanica: esempi, incluso esperimento storico del mulinello di Joule (Inizio $E_c = 0$, $E_p = mgh$; fine: $E_c \approx 0$, $E_p = 0 \rightarrow$ l'acqua del mulinello si è scaldata. Nota: potremmo usare tale esperimento per definire il grado, ad es. come "differenza di temperatura in un kg di acqua quando questa viene scaldata con 1 Joule di energia", o qualcosa del genere, ma storicamente le cose sono andate diversamente.).

Temperatura e **calore**: dal livello percezionale/intuitivo alle definizioni operative. Cominciamo con la temperatura:

- Il concetto fisico di temperatura è un raffinamento della nostra percezione sensoriale del caldo e del freddo.
- Le percezioni possono essere ingannevoli, in quanto noi siamo sensibili alla rapidità con cui assorbiamo o emettiamo calore attraverso la pelle: oggetti (verificabili strumentalmente) alla stessa temperatura ci appaiono più o meno caldi a seconda di quanto trasmettono il calore (es metalli o marmo rispetto a legno, plastica o polistirolo; gli oggetti metallici ci sembrano freddi degli altri quando sono a temperatura inferiore alla nostra temperatura corporea, ma a temperatura superiore ci sembrano più caldi, vedi es. in sauna). Famoso è il 'chilly factor' che dà la temperatura ambiente 'percepita' e dipende da umidità e velocità del vento.
- I termometri sono basati sull'osservazione che alcuni corpi cambiano qualche loro proprietà al variare della temperatura, ad esempio i metalli variano le loro dimensioni, componenti elettrici possono cambiare corrente o tensione, etc. Il caso più famoso è quello del mercurio, che ha una forte espansione termica.
- Per definire la scala termometrica è importante avere dei riferimenti. Si potrebbe usare un termometro di riferimento (in analogia al campione di kg), ma la scala oltre che arbitraria (e in principio non ci sarebbe niente di male) è difficilmente riproducibile.

  Osservazione della stabilità della temperatura in coincidenza con i cambiamenti di fase (ghiaccio $\rightarrow$ acqua; ebollizione). Il caso dell'acqua è particolarmente comodo in quando le temperature di interesse sono tipiche dell'esperienza quotidiana. Scala centigrada (quella usuale). Assunzione di linearità dell'innalzamento della colonnina di mercurio; cenno ai problemi per estendere la scala termometrica a basse ($\ll 0^o\,$C) o alte ($\gg 100\,^o$C) temperature. (Per ora, per quello che ci interessa, assumiamo l'esistenza di termometri opportunamente tarati).

– Alla base delle misure termometriche e degli scambi di calore c'è il **principio zero della termodinamica**: due corpi messi a contatto raggiungono la stessa temperatura (si termalizzano).
– Per misurare la temperatura di un corpo dobbiamo mettere in contatto con esso il termometro ed attendere lo stabilizzarsi della temperatura (tipicamente, se il corpo è 'grande' il termometro raggiungerà la temperatura del corpo, ma in generale termometro e corpo raggiungeranno una temperatura comune di equilibrio – vedi nel seguito).
– Proprietà transitiva: se il termometro in equilibrio prima con A e poi con B e all'equilibrio misuriamo lo stesso valore di temperatura, diremo che A e B sono alla stessa temperatura (e quindi in equibrio termico), anche se alle nostre sensazioni uno dei due sembra più freddo dell'altro.

Passiamo adesso al calore, cominciando, anche in questo caso, con osservazioni vaghe.

– Originariamnte il concetto di calore è legato a quello di sorgente di calore, tipicamente fuoco o raggi solari.
– Questa entità, ancora da definire operativamente, è quella che scalda i corpi, ovvero provoca variazioni di temperatura.
– è un dato di fatto che esistono sorgenti di calore più o meno 'potenti' (nel senso colloquiale del termine, per ora), ovvero capaci di scaldare più o meno rapidamente i corpi (ovvero di 'fornire più o meno calore nell'unità di tempo').
– A parità di sorgente di calore, l'innalzamento di temperatura dipende dal tempo di funzionamento (a parte in corrispondenza delle transizioni di fase, ma questa è un'altra storia).
– La stessa sorgente di calore, tenuta in funzione lo stesso tempo, scalda diversamente sostanze diverse e , a parità di sostanza, scalda diversamente diverse quantità di quella sostanza (es. pentolino o pentolone d'acqua su fornello domestico):

$$\Delta T \propto Q \tag{208}$$

$$\Delta T \propto \frac{Q}{M} \tag{209}$$

$$\Delta T = \frac{Q}{c\,M}\,, \tag{210}$$

ove M è la massa del corpo, Q è la quantità di calore e c, legato al coefficiente di proporzionalità della (209), è il *calore specifico*, una proprietà del corpo che dipende anche dalla temperatura, e quindi andrebbe scritto come $c(T)$ e quindi la (210) andrebbe riscritta come $\mathrm{d}T = \mathrm{d}Q/(c(T)\,M)$.

– Scrivedo il fattore di proporzionalità della (208) come $1/C$, definiamo la *capacità termica* C come

$$C = \frac{Q}{\Delta T} : \tag{211}$$

minore è lo sbalzo termico ΔT a parità di calore assorbito, maggiore è la capacità termica del corpo. Analogia di capacità volumetriche assumendo recipienti circolare di diversa sezione: il recipiente più capiente è quello in cui il livello del liquido si innanza di meno a parità di liquido introdotto. Ovviamente $C = c\,M$ e $c = C/m$.

– Definizione della *caloria* (cal): "quantità di calore per innalzare la temperatura di 1 g di acqua di un grado intorno a 15 ^{o}C" (ovvero da 14.5 ^{o}C a 15.5 ^{o}C). *Caloria* (kcal = 1000 cal): idem per 1 kg di acqua. Nota: il valore di riferimento per definire la caloria è dovuto al fatto che c dipende dalla temperatura (piccola dipendenza, trascurabile per molte applicazioni pratiche e per i problemi didattici).

– Notiamo dalla (210) come tale definizione implica anche aver assunto unitario il calore specifico dell'acqua intorno a 15 ^{o}C, infatti

$$1\,^o\mathrm{C} = \frac{1\,\mathrm{cal}}{c_{H_2O}(15^o\mathrm{C})\,1\,\mathrm{g}} \tag{212}$$

implica $c_{H_2O}(15^o\mathrm{C}) = 1\,\mathrm{cal}/(\mathrm{g}\,^o\mathrm{C}) = 1\,\mathrm{kcal}/(\mathrm{kg}\,^o\mathrm{C})$.
Si noti come la capacità termica è misurata in cal/^{o}C.

Scambio termico fra corpi (che formano un sistema termicamente isolato) a temperature iniziali diverse che raggiungono l'equilibrio termico (es due liquidi non reagenti miscelati in un thermos). Siano M_1, c_1 e T_1 massa, calore specifico e temperatura iniziale del primo corpo; M_2, c_2 e T_2, idem per il secondo.

– Principio zero della termodinamica: i due corpi raggiungeranno una temperatura di equilibrio T_e.

– In assenza di sorgenti termiche, se un corpo si scalda, assorbendo calore. vuol dire che l'altro lo ha ceduto:

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= 0 && (213)\\ c_1 M_1 \Delta T_1 + c_2 M_2 \Delta T_2 &= 0 && (214)\\ c_1 M_1 (T_e - T_1) + c_2 M_2 (T_e - T_2) &= 0\,, && (215) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{c_1 M_1 T_1 + c_2 M_2 T_2}{c_1 M_1 + c_2 M_2} && (216)\\ &= \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}\,. && (217) \end{aligned}$$

La temperatura di equilibrio è pari alla media delle temperature iniziali pesate con le capacità termiche (e ovviamente la formula si può estendere all'equilibrio simultaneo fra n corpi, sempre non reagenti chimicamente). Esempi: corpo in mare; normale termometro a mercurio che 'misura' la temperatura di una goccia di acqua.

Torniamo all'esperimento di Joule: quanto scalda un Joule di lavoro? Empiricamente, $1\,\mathrm{J} = 1/4.184\,\mathrm{cal}$, ovvero $1\,\mathrm{cal} = 4.184\,\mathrm{J}$, o $1\,\mathrm{kcal} = 4.184\,\mathrm{kJ}$,
Esempio: mulinello di Joule contenente 100 g di acqua a $20\,^o\mathrm{C}$, attivato da con peso da 50 kg che scende di 10 M. Lavoro compiuto dalla forza peso: $mgh = 4900\,\mathrm{J} \rightarrow 1171\,\mathrm{cal} \rightarrow \Delta T = 11.7\,^o\mathrm{C}$, ovvero temperatura finale di $31.7\,^o\mathrm{C}$.

Conservazione dell'energia, caso generale. Se solo forze conservative si conserva energia meccanica (cinetica + potenziale). Altrimenti energia meccanioca che sparisce si trasforma in energia termica: $\rightarrow$ l'energia dell'acqua dell'esempio precedente è aumentata di 4900 J: quantità di calore $\Leftrightarrow$ variazione di energia interna del sistema [questa osservazion è valida per corpi che (praticamente) non si espandono con la temperatura e rappresenta un primo passo verso il 'primo principio della termodinamica' – quest'ultimo fuori programma quest'anno].

Come è noto, ci sono altre forme di energia, la più famosa delle quali è quella elettrica, ottenuta tipicamente convertendo energia meccanica attraverso opportune turbine ('grosse dinamo'). È anche noto che l'energia elettrica può essere convertita in calore, ad es. nelle stufette elettriche. Anche senza conoscere i dettagli di come l'energia è prodotta, dobbiamo essere in grado di confrontare diverse quantità di energia e saperne calcolare gli effetti termici.
Prima di fare delle applicazioni, introduciamo il concetto di **potenza**, anch'esso un ben preciso concetto fisico mutuato dall'analogo concetto intuitivo: persona/macchina/processo più potente di un altro se riesce a fare più 'lavoro' a parità di tempo. Potenza: $P = L/\Delta t \rightarrow \mathrm{d}L/\mathrm{d}t$: Watt(W): J/s.
Esempio: 1 kg cade da 1 m. Lavoro compiuto dalla forza di gravità: 9.8 J. Se il processo si ripete una volta al secondo (ad esempio da un rubinetto esce un litro di acqua al secondo) $P = L/\Delta t = 9.8\,\mathrm{J}/1\,\mathrm{s}= 9.8\,\mathrm{W}$: questa potenza può essere convertita (eventualmente con qualche perdita dovuta al processo di trasformazione) in potenza elettrica.
Esempio: potenza di una centrale idroelettrica:

$$P = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mgh)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\, gh\,, \qquad (218)$$

ove $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ è pari al flusso di acqua (in massa, ovvero in kg/s). Dati reali (centrale ENEL della diga sul Tevere di Castel Giubileo, 29/4/05, ore 9:30):

- volume di acqua convogliata alle turbine: 180 m^3/s;

– dislivello: 7 m;

– potenza elettrica generata: 12 MW

dai quali ricaviamo $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = 180000\,\mathrm{kg/s}$, da cui $P = 1.80\,10^3\,\mathrm{kg/s} \times 9.8\,\mathrm{m/s^2} \times 7\,\mathrm{m} = 1.2\,10^7\,\mathrm{W} = 12\,\mathrm{MW}$, in accordo con il dato avuto dalla centrale (vuol dire che, a parte arrotondamenti e approssimazioni, l'efficienza di conversione da potenza meccanica a potenza termica è molto elevato).
Esempio: Uno scaldabagno della potenza di 1000 W funziona per 10 minuti: calcolare la quantità di calore assorbita dall'acqua. $E = P\,\Delta t = 1000\,\mathrm{W} \times 600\,\mathrm{s} = 600000\,\mathrm{J}$, $\rightarrow$ 143 kcal, le quali possono scaldare 70 litri di acqua di circa due gradi.

Problemi

(a) Scaldabagno da 80 litri, potenza 1000 W: quanto impiega a scaldare l'acqua da 20 ^{o}C a 60 ^{o}?

(b) Per riscaldare un corpo da 10 a 20 gradi sono necessari 1000 J, calcolare la capacità termica del corpo sia in J/^{o}C che in cal/^{o}C [nota: data l'equivalenza fra Joule e calorie, capacità termiche e calori specifici possono essere espressi sia facendo riferimento ai Joule che alle calorie].

(c) Si hanno 50 litri di acqua a 80 gradi. Quant'acqua fredda (15 gradi) bisogna aggiungere per ottenere una temperatura di equilibrio di 35 ^{o}C?

(d) Il calore specifico dell'alluminio vale 0.21 cal/g ^{o}C. Calcolarne il valore in J/kg ^{o}C.

(e) 100 g di alluminio a 80 gradi sono immersi in 200 g di acqua a 20 gradi: trovare temperatura di equilibrio.

(f) Un oggetto di 100 g è estratto dall'acqua in ebollizione e raffreddato in 200 g di acqua inizialmente a 20 gradi. Sapendo che la temperatura di equilibrio dell'oggetto e dell'acqua è 24.5 gradi, calcolare il calore specifico dell'oggetto sia in cal/g ^{o}C che in J/kg ^{o}C.

(g) Una tazza (cilindrica) di diametro di 8 cm e altezza 7 cm viene riempita con acqua a 15 gradi e poi posta in un forno a microonde da 800 W. Quanto bisognerà attendere affinché l'acqua raggiunga una temperatura di 90 ^{o}C.

(h) Una caraffa contiene un litro di acqua a 20 ^{o}C. Successivamente vengono aggiunti 100 cm^3 di acqua a 100 ^{o}C. Sapendo che inizialmente caraffa e acqua erano in equilibrio termico e che la temperatura finale di equilibrio è pari a 25 ^{o}C, calcolare la capacità termica della caraffa (si trascurino gli scambi termici con l'ambiente).

17. $\boxed{\textbf{Lunedi 2/5, 14:00-16:00}}$

Ripasso su forza di Newton e applicazioni tipiche: orbite circolari, 3^a legge di Keplero, energia potenziale, velocità di fuga e velocità di impatto.

Alcune unità di misura di energia e di potenza e applicazioni tipiche nella vita quotidiana (auto, caldaie, condizionatori, etc.).

Energia	
Unità	Conversione
cal 1	1 cal = 4.184 Joule
(kcal	1 kcal = 4184 Joule)
kwh	1 kwh = 1 kw × 1 h = $3.6\,10^6$ Joule
Btu	1 Btu = 1055 Joule
eV $^{(*)}$	1 eV = $q_e \times 1$ V= $1.6\,10^{-19}$ Joule
Potenza	
Unità	Conversione
HP (CV)	1 HP = 736 Watt
kcal/h	1 kcal/h = 1.16 Watt
Btu/h	1 Btu/h = 0.293 Watt

$^{(*)}$ 'Elettronvolt' (Il Volt sarà visto nel seguito)

Lavoro in 3D: somma dei lavori delle componenti:

$$\mathrm{d}L \;=\; \mathrm{d}L^{(x)} + \mathrm{d}L^{(y)} + \mathrm{d}L^{(y)} = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z\,. \tag{219}$$

– **Prodotto scalare**: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\theta$ ("prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo fra essi compreso").
Può essere visto come prodotto modulo per proiezione: $a\cdot(b\cos\alpha)$, ovvero $b\cdot(a\cos\alpha)$. Commuta, ovvero $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$. Prodotto scalare di un vettore con se stesso: $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$. Vettori ortogonali: prodotto scalare nullo. Applicazione ai 'versori' [$\hat{i} = (1,\,0,\,0)$, $\hat{j} = (0,\,1,\,0)$,$\hat{k} = (0,\,0,\,1)$]: $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$; $\hat{i}\cdot\hat{j} = 0$, etc.. Proprietà distributiva: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
Dalla definizione e dalle proprità segue: In particolare, ne segue che

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \;=\; (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z\,, \tag{220}$$

mediante la quale è possibile calcolarsi il prodotto scalare dalle componenti. Dalla definizione di prodotto scalare e dalla sua valutazione dalle componenti segue

$$a\,b\,\cos\theta = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z\,, \tag{221}$$

da cui è possibile calcolarsi θ note le componenti dei vettori.

Tornando al lavoro, si riconosce quindi in $F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z$ il prodotto scalare $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Problemi

(a) Si vuole condizionare un locale in cui ci sono dei computer e accessori che consumano 2000 W. Calcolare la potenza del condizionatore in Btu

(b) Calcolare la potenza in MW di una macchina da corsa da 900 HP.

(c) Una caldaia ha una potenza termica di 20000 kcal/h. Calcolare quanto vale il flusso massimo di acqua (in litri/minuto) a 50 gradi che essa riesce a fornire se l'acqua che entra nella caldaia ha una temperatura di 15 gradi.

(d) Le componenti di due vettori (nel piano xy) sono $(1, 3)$ e $(5, -1)$: trovare l'angolo fra i due vettori.

(e) Un corpo si sposta dalla posizione lungo l'asse x dal punto $x_1 = 5\,\mathrm{m}$ a $x_2 = 2\,\mathrm{m}$ (ovvero le altre coordinate rimangono invariate). Sapendo che in tale tratto il corpo è soggetto alla forza costante $\vec{F} = (-2,\, 4,\, -5)\,\mathrm{N}$, determinare il lavoro compiuto da tale forza.

(f) Sul problema precedente: dire se il corpo è soggetto anche ad altre forze.

(g) Un corpo si sposta nel piano xy da $\vec{r}_1 = (1,\, 2)\,\mathrm{m}$ a $\vec{r}_2 = (3,\, -1)\,\mathrm{m}$. Agisce la forza di intensità dipendente dalla posizione $\vec{F} = (1/x,\, 2\,y)\,\mathrm{N}$, calcolare il lavoro compiuto dalla forza.

Esercitazione (seconda ora)

18. **Giovedi 5/5, 18:00-19:00**

Lavoro positivo, negativo o nullo. Caso del moto circolare, per ogni dt:

- Forza (centripeta) radiale, mentre $ds = \vec{v}\,\mathrm{d}t$ tangenziale: $\alpha = \pi/2 \rightarrow \cos\alpha = 0 \rightarrow L = 0$;
- In dettaglio:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L(t) &= F_x v_x \mathrm{d}t + F_y v_y \mathrm{d}t && (222)\\ &= [(-m\omega^2 R\cos\omega t)\cdot(-\omega R\sin\omega t) \\ &\quad +(-m\omega^2 R\sin\omega t)\cdot(\omega R\cos\omega t)]\,\mathrm{d}t = 0\,. && (223) \end{aligned}$$

Campi conservativi: caso generale 3-D: il lavoro non dipende dal percorso: $\rightarrow$ energia potenziale dipende solo dalla posizione e non dal percorso e dalla 'storia' precedente. Esempio: piano inclinato (schematizzato da triangolo ABC, con $\overline{A}B = h$, $\overline{A}C = d$ e $\overline{B}C = b$):

i) $A \rightarrow B + A \rightarrow B$: $\Rightarrow mgh + 0 = mgh$;

ii) $A \to C$ considerando componente forza di gravità lungo AC: $\Rightarrow mg \sin{(\alpha)}\, d$, ovvero mgh, in quanto $d = h/\sin\alpha$;

ii) $A \to C$ considerando $\vec{F} \cdot \vec{\Delta s} = F\, d\, \cos\theta$, con $\theta = \pi/2 - \alpha$, ovvero $\cos\theta = \sin\alpha$: $\Rightarrow$ ancora mgh.

Ancora studio della curva E_p. Caso unidimensionale (x è la generica variabile e non rappresenta necessariamente la coordinata spaziale 'x'): $F = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$. Grafici per potenziali mgz, $1/2\, kx^2$ e $-GMm/r$. Punti di equilibrio (forza si annulla, ovvero $\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$ si annulla): analogia montagne russe. Livello di energia totale e valutazione grafica della regione accessibile al movimento del corpo e del bilancio energia potenziale e cinetica (barriera di potenziale e buca di potenziale).
In generale $E_p(\vec{r})$. Componenti della forza: $F_x = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$, $F_y = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}y$, $F_z = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}z$ e $F_r = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}r$ (quando la forza ha una simmetria radiale la forza radiale è di maggio interesse delle componenti cartesiane della forza). Esempio gravitazionale (conti lasciati come esercizio)::

$$E_p(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{224}$$

$$F_r = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = -\frac{GMm}{r^2} \tag{225}$$

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -\frac{GMm}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\, x = -\frac{GMm}{r^3}\, x \tag{226}$$

$$F_y = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}y} = -\frac{GMm}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\, y = -\frac{GMm}{r^3}\, y \tag{227}$$

$$F_z = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = -\frac{GMm}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\, z = -\frac{GMm}{r^3}\, z \tag{228}$$

Dalle (226)-(228) otteniamo

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\, \vec{r} \tag{229}$$

$$= -\frac{GMm}{r^2}\, \frac{\vec{r}}{r} \tag{230}$$

$$= -\frac{GMm}{r^2}\, \hat{r} \tag{231}$$

Ovviamente le (229) e (231) sono assolutamente equivalenti e il cubo al denominatore nella (229) non deve trarre in inganno.

Ovviamente anche la forza elettrostatica ('di Coulomb') può essere scritta in modo analogo:

$$\vec{F} = \frac{k_0\, Q\, q}{r^3}\, \vec{r} \tag{232}$$

$$= \frac{k_0\, Q\, q}{r^2}\, \hat{r}\,. \tag{233}$$

(Si ricorda che $k_0 = 9 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$.)
Lavoro compiuto dalla forza di Coulomb: analogo di quanto visto a proposito della forza gravitazionale. Energia potenziale (con riferimento rispetto $E_p(\infty) = 0$):

$$E_p = \frac{k_0\,Q\,q}{r} \tag{234}$$

Grafici di E_p nei casi $Q\,q > 0$ e $Q\,q < 0$ (quest'ultimo ha stessa forma di quello gravitazionale; il primo è invece ribaltato rispetto all'asse r). Esempio dell'avvicinamento di due nuclei 'sparati' a grande velocità: barriera di potenziale (e importanza nella fusione nucleare controllata).
Problemi

(a) Un oggetto scivola (senza ruotare!) lungo un piano inclinato con privo di attrito e, arrivato sul piano orizzontale, raggiunge la velocità di $10\,\mathrm{m/s}$. Calcolare la quota dalla quale l'oggetto era partito.

(b) Sull'esercizio precedente: sapendo che il coefficiente di attrito del piano orizzontale vale 0.3 calcolare lo spazio percorso dall'oggetto prima di arrestarsi.

19. **Venerdi 6/5, 12:00-14:00**

Soluzione dell'oscillatore armonico usando soluzione di prova complessa (premessa per oscillazioni smorzate e forzate).

$P = \mathrm{d}L/\mathrm{d}t = \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}/\mathrm{d}t = \vec{F}\cdot\vec{v}$. Esempio: auto che avanza a $40\,\mathrm{km/h}$ costanti impiegando una potenza di $5\,\mathrm{kw}$: calcolare forza del motore e coefficiente β della forza di resistenza dell'aria (assunta dipendere linearmente dalla velocità).

Cenni a cariche e struttura elementare della materia (non è materia di esame): molecole, atomi, eletroni, nuclei, nubleoni (protone e neutrone), quark (u, d, ...).

Potenziale elettrostatico: "energia potenziale per unità di carica", ovvero

$$V = \frac{k_0\,Q}{r} \tag{235}$$

Comodo in quanto, se si conosce la differenza di potenziale fra due punti, $\Delta V_{AB} = V_B - V_A$, si calcola facilmente variazione di energia potenziale e quindi lavoro compiuto dalla forza elettrostatica quando una carica q è spostata dal punto A al punto B:

$$\Delta E_p\big|_A^B = q\,\Delta V_{AB} = -\,L\big|_A^B \tag{236}$$

(Nota: se a A a B il potenziale decresce, ovvero $\Delta V_{AB} < 0$ la forza elettrostatica compie lavoro positivo, ricordare analogia gravitazionale). Unità di misura del potenziale elettrostatico: Volt (V): 1 Joule = 1 Volt × 1 Coulomb
Grafici dei potenziali elettrostatici e delle energie potenziali in funzione di r per le diverse configurazioni delle cariche elettriche, ovvero $Q \cdot q > 0$ (forza repulsiva) e $Q \cdot q < 0$ (forza attrattiva).
Campo elettrico 'generato' da una carica puntiforme: forza per unità di carica. Linee di forza e significato di campo vettoriale. Unità di misura del campo elettrico (N/C, o più comunemente V/m).
Esempi: avvicinamento di protone veloce su protone fermo → bilancio energia potenziale e cinetica; Grafico di energia potenziale con la condizione $E_{Tot} = E_c(R = \infty)$. Definizione generale di differenza di potenziale fra due punti: esempio dell'elettrone accelerato fra due placchette. Accenni ai limiti della meccanica classica: $v \ll c$.
Riepilogo forza gravitazionale e coulombiana:

	Gravità	Coulomb
F	$-\frac{G\,M\,m}{r^2}$	$\frac{k_0\,Q\,q}{r^2}$
$\vec{F}$	$-\frac{G\,M\,m\,\vec{r}}{r^3}$	$\frac{k_0\,Q\,q\,\vec{r}}{r^3}$
campo	$\vec{g} = -\frac{G\,M\,\vec{r}}{r^3}$	$\vec{E} = \frac{k_0\,Q\,\vec{r}}{r^3}$
E_p	$-\frac{G\,M\,m}{r}$	$\frac{k_0\,Q\,q}{r}$
potenziale	$-\frac{G\,M}{r}$	$V = \frac{k_0\,Q}{r}$

Forza elettrostatica e campo elettrostatico dovuto a molte cariche:

$$\vec{F}_q(r) = \sum_i F_q^{Q_i}(r) = \frac{k_0\,Q_i\,q}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\,(\vec{r}-\vec{r}_i) \qquad (237)$$

$$\vec{E}(r) = \sum_i E_i(r) = \frac{k_0\,Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\,(\vec{r}-\vec{r}_i)\,, \qquad (238)$$

ove $\vec{r}_i$ è la posizione nello spazio della carica i-ma. Esempio: cariche ai vertici di un triangolo equilatero di lato l → calolare la forza su ciascuna carica dovuta alle altre due.

Si noti che, essendo il campo elettrico pari alla forza elettrica per unità di carica ed essendo il potenziale elettrico pari all'energia potenziale per unià di carica, campo e potenziale elettrici sono legati dalle stesse relazioni che legano forza e potenziale elettrici:

$$\Delta E_p|_A^B = -\int_A^B \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s} \iff \Delta V|_A^B = -\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}, \tag{239}$$

che diventano, se forza o campo elettrico sono <u>costanti</u>

$$\Delta E_p|_A^B = -F\cdot\Delta s \iff \Delta V|_A^B = -E\cdot\Delta s\,. \tag{240}$$

Analogalmente, il campo elettrico può essere ottenuto come derivata della funzione potenziale

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} \iff E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \tag{241}$$

$$\text{(etc. per le altre componenti)} \tag{242}$$

che in caso di forza o campo uniforme in Δx diventano

$$F_x = -\frac{\Delta\, E_p}{\Delta\, x} \iff E_x = -\frac{\Delta\, V}{\Delta\, x} \tag{243}$$

Introduzione ai **problemi di urto**:
Schemi di urto di due oggetti in approssimazione di sistema isolato:

Sempre Si conserva quantità di moto:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \;=\; m_1\vec{v'}_1 + m_2\vec{v'}_2 \tag{244}$$

Urti elastici Si conserva anche energia cinetica totale:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \;=\; \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \tag{245}$$

Urti anelastici parte dell'energia 'meccanica' (cinetica) è persa: → calore, 'etc.'. Nota: gli urti in cui i corpi rimangono attaccati appartengono a questa classe (nel CM energia cinetica sparisce): urti completamente anelastici: particolarmente semplici da trattare.

Esempio: urto (centrale) di due corpi aventi stessa massa, di cui uno in movimento e l'altro a riposo: Le quazioni di conservazione si riducono a

$$\vec{v}_1 \;=\; v_1' + v_2' \tag{246}$$

$$\vec{v}_1^2 \;=\; {v'}_1^2 + {v'}_2^2\,, \tag{247}$$

la cui soluzione è $v_2' = \vec{v}_1$ e $v_1' = 0$ (oltre a $v_1' = \vec{v}_1$ e $v_2' = 0$, corrispondente al fatto che in realtà i corpi non si incontrano).

Problemi

(a) Una particelle carica positiva di $+10^{-8}\,\mathrm{C}$ si sposta da un punto di potenziale $100\,\mathrm{V}$ and un punto di potenziale $10\,\mathrm{V}$. Calcolare la variazione di energia cinetica del corpo. Sapendo inoltre che la particella raggiunge una velocità di $10000\,\mathrm{m/s}$, calcolare la massa della particella.

(b) Due corpi aventi stessa massa e stessa velocità (ma ovviamente di verso opposto) si urtano frontalmente. Calcolare le velocità finali dei due corpi assumendo che l'urto sia perfettamente elastico.

20. $\boxed{\textbf{lunedi 9/5, 14:00-16:00}}$

Urto elastico frontale (unidimensionale).
Riprendiamo le leggi di conservazione (244)-(245) degli urti elastici, riscrivendole nel modo seguente:

$$m_1\, v_1 - m_1\, {v'}_1 \;=\; m_2\, {v'}_2 - m_2\, v_2 \tag{248}$$
$$m_1 v_1^2 - m_1 {v'}_1^2 \;=\; m_2 {v'}_2^2 - m_2 v_2^2\,, \tag{249}$$

ovvero

$$m_1\,(v_1 - {v'}_1) \;=\; +m_2\,({v'}_2 - v_2) \tag{250}$$
$$m_1\,(v_1^2 - {v'}_1^2) \;=\; m_2\,({v'}_2^2 - v_2^2)\,, \tag{251}$$

dalle quali, dividendo membro a membro (la seconda diviso la prima) e ricordandosi che $a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$, si ottiene

$$v_1 + {v'}_1 \;=\; v_2 + {v'}_2\,, \tag{252}$$

ovvero

$$v_1 - v_2 \;=\; ({v'}_2 - {v'}_1)\,. \tag{253}$$

La (252) ci dice che in un urto elastico frontale la somma della velocità iniziale e finale di una particella è pari alla somma della velocità iniziale e finale dell'altra particella. Più interessante è la 'lettura' della (253): in un urto elastico la velocità relativa fra le due particelle viene invertita (ma resta costante in modulo). Inoltre, da una di queste due e dalla (249) otteniamo un sistema di equazioni lineari, la cui soluzione è:

$${v'}_1 \;=\; \frac{2\,m_2\,v_2 + (m_1 - m_2)\,v_1}{m_1 + m_2} \tag{254}$$
$${v'}_2 \;=\; \frac{2\,m_1\,v_1 + (m_2 - m_1)\,v_2}{m_1 + m_2} \tag{255}$$

Casi particolari:

$\boxed{v_2 = -v_1}$:

$$v'_1 = \frac{m_1 - 3\,m_2}{m_1 + m_2}\, v_1 \tag{256}$$
$$v'_2 = \frac{3\,m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_1 \tag{257}$$

Sottocaso interessante:

$\underline{m_1 = m_2}$:

$$v'_1 = -v_1 \tag{258}$$
$$v'_2 = v_1 \tag{259}$$

$\rightarrow$ entrambe rimbalzano all'indietro, invertendo il vettore velocità.

$\boxed{v_2 = 0}$:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_1 \tag{260}$$
$$v'_2 = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\, v_1 \tag{261}$$

Sottocasi interessanti:

$\underline{m_1 = m_2}$

$$v'_1 = 0 \tag{262}$$
$$v'_2 = v_1\ : \tag{263}$$

le particelle si scambiano il moto;

$\underline{m_1 \ll m_2}$ (ovvero urto contro un corpo di 'massa infinita')

$$v'_1 = -v_1 \tag{264}$$
$$v'_2 = 0\ : \tag{265}$$

la particella inizialmente in moto rimbalza; l'altra resta 'praticamente' in quiete (ma ha assorbito una quantità di moto pari a $2m_1v_1$!);

$\underline{m_1 \gg m_2}$ (esempio urto di palla grande contro 'pallino'):

$$v'_1 = v_1 \tag{266}$$
$$v'_2 = 2\,v_1\ : \tag{267}$$

la palla pesante prosegue praticamente imperturbata, mentre la seconda 'schizza' in avanti con velocità doppia della palla che l'ha colpita.

$\boxed{v_1 = V_1,\, v_1 = -V_2,\, m_1 \gg m_2}$ con V_1 e V_2 definite positive. (Caso fisico: racchetta contro pallina che viaggia in senso opposto)

$$\begin{aligned} v'_1 &= V_1 && (268)\\ v'_2 &= 2\,V_1 + V_2\ : && (269) \end{aligned}$$

la pallina rimbalza con una velocità pari alla sua velocità iniziale, aumentata del doppio della velocità della racchetta (ecco perché i tiri al volo contro palla che viene incontro sono particolarmente 'potenti').

Si noti come, in tutti questi casi, la (253) è rispettata. Essa ci permette noltre di ricavarsi la velocità finale senza fare conti. Prendiamo ad esempio l'ultimo caso. La differenza di velocità fra racchetta e palla vale $V_1 - (-V_2) = V_1 + V_2$ e tale sarà la differenza fra la velocità finale della palla e quella della racchetta. Ma, nell'approssimazione di massa infinita della racchetta la velocità di quest'ultima non viene modificata dall'urto (si pensi al caso limite automoscerino). Quindi la velocità finale della palla vale $V_1 + (V1 + V_2) = 2V_1 + V_2$.

Urti parzialmente anelastici: una parte dell'energia meccanica viene persa. Esempio: rimbalzi di pallini normali. Misura (indiretta) della frazione di energia persa dalla misura delle quote successive ad ogni rimbalzo (nota: l'inelasticità può dipendere anche dalla velocità di impatto e, quindi, dalla quota iniziale).

Esempi di urti completamente anelastici. Pendolo 'balistico'.

Note su conservazione di quantità di moto e 'assorbimento' di quantià di moto da parte di una parete di massa 'infinita' nel caso di urti eleastici e anelastici.

Supplemento (Non svolto a lezione, ma semplice esercizio sulle trasformazioni di velocità).
Urto elastico fra punti materiali (o urto centrale fra sfere) aventi stessa massa e velocità opposta. Soluzione con argomenti di simmetria: $\rightarrow$ rimbalzo: le velocità si invertono. Caso di pari massa, ma velocità diverse: analisi nel cenro di massa: $\rightarrow$ trasformazioni di velocità.
Trasformazione della velocità del punto materiale di massa m da $CM \rightarrow LAB$ e viceversa:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{LAB}(m) &= \vec{v}_{LAB}(CM) + \vec{v}_{CM}(m) && (270)\\ \vec{v} &= \vec{v}_{CM} + \hat{\vec{v}} && (271) \end{aligned}$$

con trasformazione inversa $\hat{\vec{v}} = \vec{v} - \vec{v}_{CM}$, ove, in questo esempio, il simbolo $\hat{\vec{v}}$ indica la velocità nel CM (e non il versore!).

Urto elastico di oggetti di pari massa nel CM e quindi nel LAB (unidimensionale, lungo linea d'urto), di cui il primo con v_1 e il secondo fermo:

$$\hat{v}_1 = v_1 - v_{CM} = v_1 - \frac{v_1}{2} = \frac{v_1}{2} \quad (272)$$
$$\hat{v}_2 = 0 - v_{CM} = -\frac{v_1}{2} \quad (273)$$
$$\hat{v}_1' = -\frac{v_1}{2} \quad (274)$$
$$\hat{v}_2' = \frac{v_1}{2} \quad (275)$$
$$v_1' = v_{CM} + \hat{v}_1' = \frac{v_1}{2} - \frac{v_1}{2} = 0 \quad (276)$$
$$v_2' = v_{CM} + \hat{v}_2' = \frac{v_1}{2} + \frac{v_1}{2} = v_1 \quad (277)$$

riottenendo lo stesso risultato visto precedentemente, vedi (262)-(263).

Problemi

(a) Inventarsi dei problemi numerici sui vari casi di urti elastici visti sopra.

(b) Una pallina cade da 1 metro. Sapendo che nel rimbalzo sul pavimento viene perso il 20% dell'energia meccanica, si determini la velocità immediatamente dopo il rimbalzo.

(c) Un oggetto di massa 1 kg urta con velocità 10 m/s un altro oggetto di massa 3 kg. Sapendo che i due corpi rimandono attaccati dopo l'urto e che il moto avviene su un piano, di coefficiente di attrito dinamico 0.2, calcolare la distanza che i due corpi percorrono dopo l'urto prima di arrestarsi.

(d) Un proiettile di 50 g colpisce orizzontalmente un pendolo balistico avente una massa di 50 kg e rimane ad esso legato dopo l'urto. Sapendo che la massa si solleva di 11 cm, determinare la velocità del proiettile.

Esercitazioni (seconda ora)

21. **Giovedi 12/5, 14:00-16:00**

Differenza di energia potenziale e differenza di potenziale per forze elettriche. Materiali conduttori, mobilità delle cariche elettriche e superfici equipotenziali (introduzione qualitativa, tanto per convincersi che le superfici equipotenziali esistono e che, tramite conduttori le differenze di potenziale possono essere trasportate in punti diversi).
Generatore: dispositivo in grado di mantenere ai suoi capi una differenza di potenziale (potenziale più alto: 'polo positivo'; potenziale più basso: 'polo negativo'; siccome il potenziale è definito a meno di una costante additiva, si sceglie usualmente lo zero in corrispondenza del polo 'negativo') e di trasportare, al suo interno, delle cariche positive dal polo negativo a quello positivo

(lavoro fatto contro la forza del campo elettrico, che invece tende naturalmente a far spostare cariche positive dal potenziale più alto al più basso; tale lavoro richiede una forza all'interno del generatore che lo compie: 'forza elettromotrice'). La differenza di potenziale fra il polo positivo e quello negativo del generatore viene indicato con f (per ricordarsi che si tratta di una forza elettromotrice), ma in pratica si usa anche il generico simbolo V (che però non va inteso come potenziale elettrostatico assoluto).
Se gli estremi del generatore sono connessi fra di loro "si può" registrare uno scorrimento di cariche dal polo positivo al polo negativo, ovvero una corrente elettrica (definita come la quantità di carica che scorre nell'unità di tempo, ovvero $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, la cui intensità è misurata in Ampère, A, corrispondente ad un Coulomb al secondo). Il passaggio o meno di corrente e la sua intensità dipendono dal tipo di materiale: alcuni matriali presentano un piccolo impedimento (**resistenza**) al passaggio di corrente, altri un grande impedimento ed altri ancora non permettono il passaggio delle cariche ('isolanti'). Legge di Ohm:

$$I_{A\to B} \;=\; \frac{V_A - V_B}{R}\,, \tag{278}$$

ove R è la resistenza elettrica del materiale, misurata in Ohm (Ω, una resistenza di $1\,\Omega$ fa passare un flusso di cariche di $1\,\mathrm{A}$ fra una differenza di potenziale di $1\,\mathrm{V}$). Attenzione al segno: se $V_A - V_B > 0$ la corrente è positiva (ovvero scorre da A a B), altrimenti negativa.
In genere V_A corrisponde al polo positivo e V_B al negativo ed R è la resistenza globale al passaggio di cariche da un polo all'altro. In questo caso la (278) diventa $I = f/R$, con I positiva.
Si noti come la (278) venga riscritta semplicemente come $I = \Delta V/R$ o semplicemente $I = V/R$.
Nota: dal punto di vista fisico sono gli elettroni a muoversi, ed essi vanno dal polo negativo a quello positivo, ma nello studio dei circuiti si usa semplicemente una corrente convenzionale positiva.
Lavoro effettuato dalla forza elettromotrice f per trasportare (all'interno del generatore) un elemento di carica $\mathrm{d}q$ dal polo negativo al polo positivo:

$$\mathrm{d}L\big|_{GEN} \;=\; -\,\mathrm{d}L\big|_{C.E.} = -\mathrm{d}q\cdot(-f) = \mathrm{d}q\cdot f\,, \tag{279}$$

ovvero è richieta dal generatore una potenza di

$$P_{GEN} = \frac{\mathrm{d}L_{GEN}}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\cdot f = I\cdot f\,. \tag{280}$$

Quando invece le cariche positive si muovono da polo positivo al polo negativo è il campo elettrico a compiere lavoro positivo $\mathrm{d}q\cdot f$, a cui corrisponde una potenza $I\cdot f$.
Che fine fa il lavoro fatto dal campo elettrico? $\rightarrow$ analogia meccanica: impianto

di risalita e sciatori che tornano alla posizione di partenza sciando:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L|_{Motore} &= -\,\mathrm{d}L|_{Grav.}\,\mathrm{d}m\cdot(g\cdot h) && (281)\\ P_M &= \frac{\mathrm{d}L_M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\cdot(g\cdot h)\,. && (282)\end{aligned}$$

Si nota l'analogia fra la (282) e la (280). [Si veda anche il problema della potenza della diga, che dava la (218).] Il lavoro positivo fatto dal campo gravitazionale nel riportare gli sciatori alla base va a finire in calore dalle forze di attrito (momentaneamente esso produce anche energia cinetica, ma alla fine anche questa diventa nulla). Analogalmente, le cariche perdono energia cinetica per attrito e alla fine tutto il lavoro compiuto dal campo elettrico termina in calore, il quale riscalda la resistenza: *effetto Joule*: la potenza $P = I\,f$ finisce finisce in calore.
Questa relazione è valida ai capi di ogni 'resistore' (elemento del circuito dodato di resistenza) e, scrivendola, come si usa abitualmente, usando il simbolo V per la differenza di tensione ai capi della resistenza e ricordandoci della legge di Ohm, otteniamo

$$\begin{aligned} P &= I\,V && (283)\\ &= \frac{V}{R}\,V = \frac{V^2}{R} && (284)\\ &= I\,R\,I = R\,I^2\,. && (285)\end{aligned}$$

(Si ricorda che, essendo P una potenza, viene misurata in Watt: $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{V}\times 1\,\mathrm{A}$.)

Circuito elementare composto da un generatore e tante resistenze 'in serie' (attraversate dalla stessa corrente). La somma di tutte differenze di potenziale ('cadute di tensione') nel fare un giro completo deve dare zero (si ritorna allo stesso potenziale):

$$\sum_i \Delta V_i = 0\,. \qquad (286)$$

Facciamo l'esempio con un generatore, fra i punti A e B (con positivo in B), con $V_B - V_A = f > 0$, e tre resistenze (R_1, R_2, R_3) fra gli altri punti (con $V_E \equiv V_A$):

$$\begin{aligned} (V_B - V_A) + (V_C - V_B) + (V_D - V_C) + (V_E - V_D) &= 0 && (287)\\ (V_B - V_A) + (V_C - V_B) + (V_D - V_C) + (V_A - V_D) &= 0 && (288)\\ f - (V_B - V_C) - (V_C - V_D) - (V_D - V_E) &= 0 && (289)\\ f - R_1\,I - R_2\,I - R_3\,I &= 0 && (290)\end{aligned}$$

ovvero

$$
\begin{aligned}
f &= R_1\, I + R_2\, I + R_3\, I && (291)\\
f &= I\,(R_1 + R_2 + R_3) && (292)\\
I &= \frac{f}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{f}{R_s} && (293)
\end{aligned}
$$

con

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3\,. \qquad (294)$$

Vediamo quindi come più **resistenze in serie** si comportano ai fini della corrente che scorre nel circuito come se ci fosse una sola resistenza R_s, di valore pari alla somma delle resistenze.
Se siamo poi interessati a calcolare la tensione ai capi di ciascuna resistenza basterà applicare a ciascuna di esse la legge di Ohm: $V_i = R_1\, I$, etc.

Problemini

(a) Una carica di $+2\,10^{-10}\,\mathrm{C}$ viene spostata dal punto A al punto B. Sapendo che $V(A) = 2\,\mathrm{V}$ e $V(B) = 5\,\mathrm{V}$, calcolare il lavoro compiuto dal campo elettrico.

(b) Sapendo che $V(A) - V(B) = 12\,\mathrm{V}$ e che quando la carica q si sposta da A a B il campo elettrico compie il lavoro di $6\,10^{-12}\,\mathrm{J}$, calcolare il valore di q.

(c) Un filo conduttore è percorso da una corrente elettrica di 10 A. Calcolare la carica elettrica che attraversa una sezione del filo in 10 minuti. Sapendo che una carica elementare ha una carica di $1.6\,10^{-19}\,\mathrm{C}$, calcolare il numero di cariche elementari che ha attraversato tale sezione di filo.

(d) I poli di un generatore da 4.5 V sono connessi fra di loro da una resistenza di $100\,\Omega$. Calcolare la corrente corrente elettrica che scorre nella resistenza e la potenza dissipata.

(e) Sul problema precedente: assumendo che nel generatore (una batteria) sia accumulata una energia di 3600 J, calcolare per quanto tempo la batteria può alimentare il circuito (si assuma che la tensione rimanga costante finché c'è energia e poi cessi improvvisamente).

(f) Una macchinetta di caffè da viaggio è alimentata dalla batteria della macchina (12 V) ed è in grado di scaldare 100 g di acqua da $20\,^o\mathrm{C}$ a $100\,^o\mathrm{C}$ in cinque minuti. Calcolare: la potenza elettrica erodata dalla resistenza che scalda l'acqua e il valore di tale resistenza.

(g) Quanto ci si mette a scaldare la stessa quantità di acqua se la macchinetta viene fatta funzionare a 240 V? (Ammesso che non si rompa. . .). Nota: si consideri la tensione di 240 V (che è alternata), come se fosse una semplice differenza di tensione continua (si può dimostrare che in effetti, ai fini del riscaldamento di una resistenza esse sono equivalenti, ma questo fa al di là di questo corso).

(h) Tre resistenze, di valore 1, 2 e 3 Ω sono connesse in serie e collegate ad un generatore di tensione di 10 V. Calcolare la corrente che passa nel circuito, la tensione ai capi di ciascuna resistenza e la potenza dissipata da ciascuna di esse.

(i) Una resistenza di $10\,\Omega$ è percorsa da una corrente di 0.5 A. Assumendo che la resistenza pesi 0.1 g, il materiale abbia un calore specifico 1/10 di quello dell'acqua e la resistenza non sia raffreddata, si calcoli quanto tempo impiega la resistenza a raggiungere la temperatura di $250\,^o$C da una temperatura iniziale di $20\,^o$C.

(j) Le caratteristiche di una batteria per automobile (12 V) sono "330 A" (la corrente massima in grado di erogare) e "61 A·h" (ovvero riesce a fornire 1 A per 61 ore, o 61 A per 1 ora, etc). Assumendo tali valori e un comportamento ideale della batteria (niente resistenze interne) calcolare la potenza massima che la batteria riesce a fornire e l'energia (chimica) immagazzinata in essa.

22. **Venerdi 23/5, 14:00-16:00**

Rapido riepilogo, tensione, corrente, resistenza, potenza e resistenze in serie.
Resistenze in parallelo: stessa tensione V fra i capi delle resistenza, la corrente differisce da resistore a resistore (complementare delle resistenze in serie); la corrente totale si ripartisce nelle varie resistenze (il flusso totale di cariche si deve conservare), ovvero $\sum_i I_i = I$

$$V_i = V \tag{295}$$
$$I_i = \frac{V_i}{R_i} = \frac{V}{R_i} \tag{296}$$
$$I = \sum_i I_i = \sum_i \frac{V}{R_i} = V \sum_i \frac{1}{R_i} \,. \tag{297}$$

Ma V/I è per definizione la resistenza del sistema di resistenze messe in parallelo, ovvero

$$R_p = \frac{V}{I} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{R_i}} \tag{298}$$
$$\frac{1}{R_p} = \sum_i \frac{1}{R_i} \,: \tag{299}$$

La reciproco della resistenza del parallelo è pari alla somma dei reciproci di ciascuna resistenza. Si capisce inoltre che la resistenza del parallelo è inferiore alla resistenza minima. Se si hanno n resistenze uguali R, la resistenza del parallelo vale R/n.
Esempio numerico: generatore da 15 V e tre resistenze da $10\,\Omega$ (serie di una

con parallelo delle altre due). Valutazione di resistenza equivalente, intensità di corrente, tensione ai capi di ogni resistenza, corrente e potenza per ogni resistenza, potenza totale.

Condensatore: oggetto in grado di accumulare delle cariche e tale che la tensione V ai suoi capi cresce linearmente con la carica accumulata Q (e, ovviamente, viceversa):

$$Q \;=\; C\,V\,, \tag{300}$$

ove C indica la capacità elettrica (si noti l'analogia con la capacità termica). La capacità è misurata in Farad (F, $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{C}/1\,\mathrm{V}$), ma questa è una unità 'grande' e vengono usati pF ($10^{-12}\,\mathrm{F}$), nF ($10^{-9}\,\mathrm{F}$) e μF ($10^{-6}\,\mathrm{F}$).
Nota: per carica accumulata si intendono cariche positive ad un 'capo' (armatura) e carica negativa ad un altro 'capo' (l'oggetto è globalmente carico). Più precisamente, se indichiamo le armature con A e B e supponiamo che ci sia la carica positiva Q in A, allora ci sarà una carica negativa in B e $V_A - V_B = V > 0$, ovvero A è positivo rispetto a B.
Applicazione: un condensatore posto in un circuito ha, ad un dato istante, una differenza di potenziale fra i suoi capi che dipende da quanta carica ha immagazzinato sino a quel momento (con un segno che dipende da quale lato si è accumulata la carica positiva).

Carica/scarica condensatore, collegandolo ad un generatore di forza elettromotrice f attraverso una inevitabile resistenza R (il caso $f = 0$ corrisponde ad un 'corto circuito' che determina la scarica la scarica del condensatore). Dalla (286):

$$f \;=\; R\,I + V_c\,. \tag{301}$$

Utilizzando la relazione fra tensione e carica del condensatore, $V_c = Q/C$ e osservando che la variazione di carica del condensatore del tempo è pari al flusso di carica nell'unità di tempo (si immagini un flusso di acqua che riempie un recipiente), ovvero $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = I$, possiamo scrivere l'equazione precedente come

$$\begin{aligned} f &= R\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} && (302)\\ f &= R\,C\,\frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}t} + V_c && (303)\\ \frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{R\,C}\,(f - V_c)\,, && (304) \end{aligned}$$

ottenendo un'equazione differenziale analoga a quella della variazione di velocità nel moto con attrito di viscosità [vedi (107)], che riscriviamo nella forma generale:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha\,(x_f - x) \tag{305}$$

Caso analogo che coinvolge la capacità termica: Termalizzazione verso una temperatura T_f di un corpo di capacità termica 'infinita' (es. T_f ambiente costante). [Esperimento in classe: raffreddamento di un termometro, inizialmente posto al sole, da 41 a 26 gradi.] Dato il coefficiente di 'dispersione termica'[1] η e lo sbalzo termico $(T_f - T)$ istantaneo fra la temperatura asintotica e quella del corpo che si stà termalizzando, il calore trasferito in dt vale

$$\mathrm{d}Q = \eta\,(T_f - T)\,\mathrm{d}t, \tag{306}$$

ovvero

$$C\mathrm{d}T = \eta\,(T_f - T)\,\mathrm{d}t, \tag{307}$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\eta}{c\,M}\,(T_f - T)\,. \tag{308}$$

Si riottiene la stessa struttura della (305), con $\alpha = \eta/C$ e $x_f = T_f$.

Risolviamo la (305) per 'separazione di variabili':

$$\frac{\mathrm{d}x}{x - x_f} = -\alpha\,\mathrm{d}t \tag{309}$$

$$\int_{x_0=x(t=0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x - x_f} = \int_{t=0}^{t} -\alpha\,\mathrm{d}t' \tag{310}$$

$$\log\frac{x(t) - x_f}{x_0 - x_f} = -\alpha\,t \tag{311}$$

$$x(t) - x_f = (x_0 - x_f)\,e^{-\alpha\,t} \tag{312}$$

$$x(t) = x_f + (x_0 - x_f)\,e^{-\alpha\,t} \tag{313}$$

$$x(t) = x_f + (x_0 - x_f)\,e^{-t/\tau}\,, \tag{314}$$

ove $\tau = 1/\alpha$, delle dimensioni di un tempo, è la *costante di tempo* del fenomeno. Quando $t = \tau$,

$$(x(\tau) - x_f) = \frac{(x_0 - x_f)}{e} \approx 0.37\,(x_0 - x_f). \tag{315}$$

[1]Chiamiamo così la costante η che compare nella (306) e seguenti. Esso è dovuto a superficie di contatto A, spessore dello strato isolante Δx e *conducibilità termica* del materiale λ da

$$\eta = \lambda\frac{A}{\Delta x}\,.$$

Le dimensioni di η sono quindi cal/(grado · secondo), ovvero anche Watt/grado. Le dimensioni della conducibilità termica sono invece cal/(grado · metro · secondo)

Applicazione a carica e scarica del condensatore, con $\tau = R\,C$ e $x = V_c$:

Carica $x_0 = 0$, $x_f = f$:

$$V_c(t) \;=\; f + (0 - f)\, e^{-t/\tau} = f\,(1 - e^{-t/\tau})\,. \qquad (316)$$

Scarica : $x_0 = V_{c_0} = f$, $x_f = 0$:

$$V_c(t) \;=\; 0 + (f - 0)\, e^{-t/\tau} = f\, e^{-t/\tau}\,. \qquad (317)$$

Applicazione al termometro da temperatura iniziale T_0 a temperatura ambiente T_A:

$$T(t) \;=\; T_A + (T_0 - T_A)\, e^{-t/\tau}\,. \qquad (318)$$

ove $\tau = C/\eta$: maggiore è la capicità termica e minore la dispersione termica e maggiore è τ, ovvero minore è la velocità di raffreddamento/riscaldamento. Confronto qualitativo con i risultati dell'esperimento fatto in aula. Esempi di termalizzazione: thermos, laghi, Mar Mediterraneo, etc.
Valutazioone emptirica di τ dalla (315)
Per completare la calorimetria: **calore latente** di fusione e di evaporazione. Durante una transizione di fase (acqua-ghiaccio, acqua-vapore) il sistema assorbe/cede calore senza cambiare la temperatura (esempio quotidiano acqua: che bolle in attesa che ci si decida a buttare giù la pasta). Valori per l'acqua: fusione $\lambda = 80\,\text{cal/g}$; ebollizione: $\lambda = 540\,\text{cal/g}$.
Esempio: 10 g di chiaccio a -10 ^{o}C in 50 g acqua a 20 ^{o}C: $\rightarrow$ temperatura di equilibrio (altra informazione necessaria: calore specifico del ghiaccio, circa 1/2 di quello dell'acqua). Il calore ceduto dai 50 g di acqua inizialmente a 20 ^{o}C serve a: innalzare la temperatura del ghiaccio da $T_g = -10\,^o$C a 0 ^{o}C; far fondere il ghiaccio; innalzare la temperatura del'acqua ottenuta dalla fusione del ghiaccio da 0 ^{o}C a T_e, ovvero:

$$c_A\, M(T_A - T_e) \;=\; c_g\, M_g\,(0 - T_g) + \lambda M_g + c_A\, M_g\,(T_e - 0)\,, \qquad (319)$$

con c_A e c_g calori specifici di acqua e ghiaccio. Si ottiene $T_e = 2.5\,^o$C. L'acqua a temperatura ambiente ha perso 885 cal, delle quali: 50 sono servite a scaldare il ghiaccio, 800 a farlo fondere e 25 per portarlo a 2.5 ^{o}C

Problemini

(a) Quattro resistenze uguali, ciascuna da 40 Ω, sono poste sui lati del quadrato ABCD e collegate fra di loro. Calcolare quanto vale la resistenza fra A e C e quella fra A e B.

(b) Un condensatore è caricato a 10 V e successivamente viene scaricato su una resistenza da 10 kΩ (10000 Ω). Si misura che dopo 11 ms (10^{-3} s) la tensione si è ridotta a 5 V: Determinare la capacità del condensatore.

(c) Un bicchiere di acqua di 200 g, inizialmente a 80 ^{o}C, raggiunge la temperatura ambiente di 20 ^{o}C. Sapendo che dopo 20 minuti la temperatura era scesa a 42 ^{o}C, determinare il τ dell'andamento esponenziale di raffreddamento. Determinare anche η.

(d) Trovare la soluzione numerica dell'esempio dei 10 g di ghiaccio in 50 g di acqua.

(e) In attesa di buttar giù la pasta, si tiene una pentola in ebollizione ed evapora un litro di acqua. Calcolare l'energia sprecata (in kwh).

23. $\boxed{\textbf{Lunedi 16/5, 14:00-16:00}}$

Concetto di maglia e di nodo e principi di Kirchhoff dei circuiti elettrici:

1 La somma algebrica delle correnti che entra in un nodo è nulla:

$$\sum_i I_i \;=\; 0\,, \tag{320}$$

ove il segno delle correnti è positivo se le correnti sono entranti nel nodo (dirette verso il nodo) e negativo altrimenti. Alla base di questa legge c'è la conservazione della carica elettrica e quindi, istante per istante, tanta carica arriva in un punto, tanta ne deve uscire (altrimenti si avrebbe un accumulo di carica – si pensi all'analogo idraulico).

2 Se si parte da un punto del circuito e si segue un percorso chiuso per tornare allo stesso punto (ovvero si percorre una "maglia"), si ritorna allo stesso potenziale, ovvero la somma delle cadute di potenziale lungo la maglia è nulla:

$$\sum_i \Delta V_i \;=\; 0\,. \tag{321}$$

Per esempio, se si consida la maglia per i punti A-B-C-D-E-A, con

- generatore f_1 fra A e B, con $V(B) > B(A)$;
- resistenze R_1 e R_2 rispettivamente fra B e C e fra C e D (e chiamando I_1 e I_2 le correnti per scorrono in tali resistenze ed orientate nel verso di percorrenza della maglia);
- generatore f_2 fra D ed E, con $V(D) > B(E)$;
- resistenza R_3 e R_2 E ed A (con rispettiva corrente I_3, orientata nel verso di percorrenza della maglia)

otteniamo (si presti attenzione ai segni):

$$\sum_i \Delta V_i \;=\; 0$$

$$
\begin{aligned}
(V_B - V_A) + (V_C - V_B) + (V_D - V_C) + (V_E - V_D) + (V_A - V_E) &= 0 \\
f_1 - (V_B - V_C) - (V_C - V_D) - f_2 - (V_E - V_A) &= 0 \\
f_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 - f_2 - R_3 I_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Come si vede, la (321) può essere riscritta nei seguenti modi

$$\sum_i f_i - \sum_j R_j I_j = 0 \tag{322}$$

$$\sum_i f_i = \sum_j R_j I_j \,, \tag{323}$$

ove forze elettromotrici e correnti sono positive se concordi con il verso di percorrenza della maglia. (Si noti come le I_j possano essere diverse fra di loro ed anche avere orientamenti discordi in quanto non si sta considerando un semplice circuito con elementi posti in serie, ma una maglia definita su un circuito complicato).

Uso delle leggi di Kirchhoff per risolvere i circuiti:

- si definiscono delle correnti nei diversi tratti, scegliendone arbitrariamente il verso;
- Utilizzando le (320)-(321) si scrivono n equazioni indipendenti, ove n è il numero di correnti incognite.
- Usando le ben note tecniche (sostituzione per casi semplici, metodi di algebra lineare nei casi complicati) si trovano le n correnti (con i loro segni).

Condensatori in parallelo e in serie:

– parallelo: stessa differenza di potenziale (tensione) V_p, carica $Q_i = C_i\, V_p$ per ogni condensatore; ovvero il sistema di condensatori ha accumulato una carica totale $Q_p = \sum_i Q_i = \sum C_i\, V_p = (\sum C_i)\, V_p$ alla tensione V_p; ovvero la capacità equivalente vale $Q_p/V_p = \sum_i C_i$:

$$C_p = \sum_i C_i \tag{324}$$

– parallelo: stessa carica (per effetto di induzione completa da un condensatore all'altro – concetto non approfondito a questo corso), e quindi differenza di tensione pari alla somma delle differenze di tensione: $V_s = \sum_i V_i = \sum Q_s/C_i = (\sum 1/C_i)\, Q_s$; ovvero capacità equivalente $Q_s/V_s = 1/(sum 1/C_i)$:

$$\frac{1}{C_s} = \sum_i \frac{1}{C_i} \,. \tag{325}$$

Regola mnemonica: "opposto delle resistenze".

Energia del condensatore.
Riprendiamo il circuito con un generatore, una resistenza e un condensatore posti in serie:

$$f = R\,I + V_C\,. \tag{326}$$

Moltiplicando per I entrambo i membri:

$$I\,f = R\,I^2 + V_C\,I \tag{327}$$

$$P_G = P_J + P_C \tag{328}$$

ove abbiamo indicato con P_G la potenza $f\,I$ erogata dal generatore, con P_J la potenza $R\,I^2$ dissipata dalla resistenza pwer effetto Joule e con P_C il nuovo termine $V_C\,I$, che associamo alla potenza per caricare il condensatore, e che possiamo riscrivere come

$$P_C = \frac{Q}{C}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\,. \tag{329}$$

Durante il processo di carica del condensatore il generatore fa un lavoro totale $f\,Q = C\,f^2$. Nel frattempo l'energia immagazzinata nel condensatore vale

$$E_C = \int_0^\infty \frac{1}{C}\,Q\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \tag{330}$$

$$= \int_0^{Q(t=\infty)} \frac{1}{C}\,Q'\,\mathrm{d}Q \tag{331}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q_F^2}{C} = \frac{1}{2}\,C\,f^2\,, \tag{332}$$

ove abbiamo indicato con Q_F la carica 'finale' immagazzinata nel condensatore, che possiamo chiamare genericamente Q.
Confrontando l'energia erogata dal generatore con quella immagazzinata nel condensatore, si evince che la resistenza ha dissipato per effetto Joule tanta energia quanta ne è stata nel condensatore (ovvero il 50% dell'energia erogata dal generatore durante il processo di carica viene dissipato in calore).

Problemi

(a) Dalla (317) e dalla definizione $I = dQ/dt$ ricavarsi la corrente che scorre nel circuito durante il processo di scarica del condensatore e la tensione ai capi della resistenza.

(b) [Continuazione del problema precedente] Ricavarsi la legge che dà la potenza istantanea $P_J(t)$ dissipata per effetto Joule sulla resistenza durante la scarica del condensatore e l'energia totale dissipata, ottenuta come $E_j = \int_0^\infty P_J(t)\,\mathrm{d}t$.

(c) Un condensatore di $1\,\mu$F è caricato ad una differenza di potenziale di $10\,$V. Calcolare la carica e l'energia accumulata.

(d) [Continuazione del problema precedente] Il condensatore viene fatto scaricare connettendolo ad una resistenza di $10\,000\,\Omega$ ($10\,\mathrm{k}\Omega$). Calcolare quanto vale carica ed energia nel condensatore dopo $5\,$ms (millisecondi) dall'inizio della scarica.

(e) Un condensatore inizialmente a $10\,$V è fatto scaricare su una resistenza di $1\,\mathrm{M}\Omega$. Sapendo che la differenza di potenziale ai suoi capi impiega $35\,$ms per portarsi a $5\,$V, calcolare la capacità del condensatore.

Esercitazioni (seconda ora)

24. **Giovedi 19/5, 18:00-19:00**

Forza di Lorentz dovuta a campi magnetici ($\vec{B}$, Tesla, T) su particelle cariche (carica q) in movimento (velocità $\vec{v}$):

$$\vec{F} \;=\; q\cdot\vec{v}\wedge\vec{B} \tag{333}$$

ove il simbolo "$\wedge$" (anche indicato con "$\times$") indica il *prodotto vettoriale* (a differenza del prodotto scalare, il risultato è un vettore).
Proprietà del prodotto vettoriale: dato $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{c}$:

- $\vec{c}$ è ortogonale sia ad $\vec{a}$ che a $\vec{b}$, e quindi ortogonale al piano definito da $\vec{a}$ e $\vec{b}$;
- il modulo di $\vec{c}$ è dato dal prodotto dei moduli di $\vec{a}$ e $\vec{b}$ per il seno dell'angolo fra loro compreso: $c=a\cdot b\cdot\sin\theta$;
- il verso è tale che, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono diretti rispettivamente lungo i versori $\hat{x}$ e $\hat{y}$ (ovvero $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$), $\vec{c}$ è diretto lungo $\hat{z}$ (ovvero $\hat{k}$);
- il prodotto vettoriale anticommuta: $\vec{b}\wedge\vec{a}=-\vec{a}\wedge\vec{b}$ (quindi bisogna fare attenzione all'ordine di $\vec{v}$ e $\vec{B}$ nell'espressione della forza).
- note le componenti di $\vec{a}$ e di $\vec{b}$ le componenti di $\vec{c}$ sono ottenute dal determinante di

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{334}$$

ovvero

$$\vec{c} \;=\; (a_yb_z-a_zb_y)\cdot\hat{\imath}+(a_zb_x-a_xb_z)\cdot\hat{\jmath}+(a_xb_y-a_yb_z)\cdot\hat{k}\,. \tag{335}$$

La forza di Lorentz è più complicata di quelle viste finora in quanto dipende da carica, velocità, campo magnetico, direzioni e versi di $\vec{v}$ e $\vec{B}$.

Esempio: moto di una particella carica in campo magnetico $\vec{B}$ uniforme ortogonale a $\vec{v}$:

$$F = q\,v\,B\,, \tag{336}$$

costante e sempre ortogonale a $\vec{v}$: $\rightarrow$ moto circolare uniforme, con forza centripeta $q\,v\,B$:

$$m\,\frac{v^2}{R} = q\,v\,B \tag{337}$$
$$R = \frac{m\,v}{q\,B} \tag{338}$$
$$T = \frac{2\pi\,m}{q\,B} \tag{339}$$

Il raggio varia linearmente con v, mentre il periodo (e quindi la frequenza) non dipendono da essa (!): principio del ciclotrone ($\nu = 1/T$ è la 'frequenza di ciclotrone'). Si noti invece la dipendenza del raggio dall'energia cinetica:

$$R = \frac{2\,m\,E_c}{q\,B} \tag{340}$$
$$E_c = \frac{q^2B^2R^2}{2\,m}\,. \tag{341}$$

Nota importante: la forza di Lorentz non compie lavoro in quanto $\mathrm{d}L = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \vec{F}\cdot\vec{v}\mathrm{d}\,t$, con $\vec{F}$ e $\vec{v}$ ortogonali.
Caso generale di particella carica in campo magnetico ed elettrico:

$$\vec{F} = q\,\vec{E} + q\cdot\vec{v}\wedge\vec{B}\,. \tag{342}$$

Oscillazioni smorzate
Equazioni del moto di corpo soggetto a forza elastica e forza di viscosità $-\beta\vec{v}$ (caso unidimensionale):

$$F = -k\,x - \beta\,v \tag{343}$$
$$m\,a = -k\,x - \beta\,v\,, \tag{344}$$

ovvero

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \beta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\,x = 0 \tag{345}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\beta}{m}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,x = 0 \tag{346}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x = 0\,, \tag{347}$$

con $\gamma = \beta/m$ e $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, entrambe aventi le dimensioni dell'inverso del tempo. Il caso con $\beta = 0$, ovvero $\gamma = 0$ si riduce all'oscillatore armonico. $\beta \neq 0$ introduce lo smorzamento, come mostrato nell'esperienza in aula (moto della molla).

Introduzione (empirica) all'induttanza, come elemento del circuito ai capi del quale c'è una differenza di potenziale proporzionale alla variazione nel tempo della corrente, con coefficiente di proporzionalità L

$$F_L \;=\; -L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,. \tag{348}$$

Si può verificare che le dimensioni di L sono quelle di $\Omega\cdot$ s [$L = -F_L/(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t)$ $\rightarrow$ V/(A/s) $\rightarrow$ $\Omega\cdot$ s]. La sua unità di misura è l'Henry (H): $1\,\mathrm{H} = 1\,\Omega \times 1\,\mathrm{s}$.

Problemi

(a) Una particella di carica $q = 10^{-12}$ C si muove con una velocità di componenti $(10000, 0, 0)$ m/s ed è soggetta ad un campo magnetico di componenti $(0, 0, -1)$ T: trovare modulo, direzione e verso della forza di Lorentz [non usare la (335)]

(b) La corrente alternata $I = I_0 \cos(2\pi\nu\, t)$, con $I_0 = 1$ A e $\nu = 50$ Hz, attraversa una bobina avente un'induttanza di $L = 10$ mH. Trovare quanto vale la tensione ai capi dell'induttanza.

25. $\boxed{\textbf{Venerdi 21/5, 14:00-16:00}}$

Effetto nel circuito di (auto-)induttanza, con introduzione qualitativa (l'induzione magnetica vera e propria non fa parte del corso):

- Corrente I che percorre una 'bobina': $\rightarrow$ campo magnetico.
  Esempio: elettromagnete, come quelli negli altoparlanti (segnale musicale $\rightarrow$ corrente $I(t)$ all'uscita dell'amplificatore $\rightarrow$ campo magnetico $B(t)$ modulato dal segnale musicale $\rightarrow$ magnete permanente immerso in $B(t)$ e solidale con la membrana dell'altoparlante $\rightarrow$ oscillazione membrana $\rightarrow$ suono).
- Se I cambia con il tempo: $\rightarrow$ forza elettromotrice indotta ai capi della bobina $-\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. Il segno meno ha il seguente significato: se la corrente scorre dal capo A al capo B dell'induttore (la bobina) e cresce (ovvero $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t > 0$), la forza elettromotrice indotta è tale che $V(A) < V(B)$; viceversa se la corrente diminuisce.
- La forza elettromostrice indotta è "tale da opporsi alla causa che l'ha generata": se I sta scorrendo da A a B ed aumenta, la forza elettromotrice indotta tende a ridurla.

Siamo interessati a studiare l'effetto di L sul circuito dalla sola conoscenza della (348). Ad esempio, vediamo come cambia la legge di scarica del condensatore se aggiungiamo anche una induttanza in serie a C ed R. Scegliendo il verso positivo della corrente quello che carica il condensatore, ovvero quello per cui $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = I$, dalla (321) abbiamo

$$\begin{aligned}
\Delta V_C + \Delta V_R + \Delta V_L &= 0 && (349)\\
-V_C - R\,I - L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= 0 && (350)\\
-\frac{Q}{C} - R\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - L\,\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} &= 0 && (351)\\
L\,\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + R\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} &= 0 && (352)\\
\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L\,C}\,Q &= 0 && (353)\\
\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,Q &= 0 && (354)
\end{aligned}$$

(ove $\gamma = R/L$ e $\omega_0^2 = 1/LC$), formalmente uguale alla (347) e quindi avente analoga soluzione. Siamo quindi interessati a risolvere la generica equazione differenziale, scritta nella generica variabile z

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,z = 0 \qquad (355)$$

Prima di risolvere questa equazione differenziale, analizziamo l'analogia fra i due problemi fisici, in particolare confrontando la (352) con la (345). In un caso siamo interessati alla variazione nel tempo della posizione $x(t)$ del un punto legato all'estremo di una molla, in un altro alla carica $Q(t)$ depositata su un'armatura del condensatore. Nel caso meccanico la derivata rispetto al tempo della quantità di interesse rappresenta la velocità, nel caso elettrico la corrente elettrica. Inoltre:

- $\beta\,v$ rappresenta la forza di attrito di viscosità, ovvero il termine che 'brucia' energia, nel senso che se $\beta = 0$ il sistema conserva l'energia meccanica, ovvero la (345) si riduce ad un oscillatore armonico ideale.
- L'equivalente elettrico di β è la resistenza R, la quale consuma energia per effetto Joule. Si evince quindi che un *ideale circuito* (resistenze nei circuiti, benché minime, sono inevitabili, cosìcome inevitabili sono gli attriti nei sistemi meccanici) avente solo C ed L (ovvero quello che si chiama un circuito 'LC', mentre il circuito con $R \neq 0$ si chiama genericamente 'RLC', o 'RCL') si comporterebbe come un oscillatore armonico nella variabile $Q(t)$, con l'energia che viene 'palleggiata' fra condensatore e induttanza, con periodo $2\pi/\omega_0$. Conosciamo bene il caso meccanico. Scriviamo le

espressioni di $Q(t)$ e $I(t)$:

$$
\begin{aligned}
Q(t) &= Q_0 \cos(\omega_0 t) && (356)\\
I(t) &= -Q_0\,\omega_0 \sin(\omega_0 t)\ : && (357)
\end{aligned}
$$

* inizialmente il condensatore comincia a scaricarsi e circola una corrente negativa, inizialmente nulla e che cresce in modulo con il tempo, la quale produce un campo magnetico nella bobina;
* dopo un quarto di periodo (ovvero quando $\omega_0 t = \pi/2$) il condensatore si è completamente scaricato e la corrente è massima in modulo (è minima, se si considera anche il segno);
* per t immediatamente maggiore di $T/4$ la corrente ricarica il condensatore, ma con polarità opposta (cariche positive cominciano ad arrivare sull'armatura inizialmene negativa), la corrente decresce in modulo e per $T/2$ il condensatore è di nuovo carico, con $Q(T/2) = -Q(0)$;
* poi tutto procede a ritroso, al tempo T il sistema ritorna esattamente nello stato iniziale e il moto si ripete all'infinito.

Si noti come varia l'energia del condensatore nel tempo. In particolare per $t = 0,\ \pi,\ \ldots$ è pari all'energia iniziale $1/2\,C\,V_{C_0}^2$, mentre per $t = \pi/2,\ 3/2\pi,\ \ldots$ essa è nulla: l'energia mancante è da ricercare nell'energia associata ad L (energia del campo magnetico).

- L è l'analogo della massa (inerziale) m in quanto si oppone alla variazione di I.
- Infine l'analogo della costante elastica k della molla è $1/C$: come una molla più è lontana dalla posizione di equilibrio e più è difficile tirarla/comprimerla ancora, così un condensatore più è carico e più è difficile caricarlo ulteriormente [in quanto il lavoro da compiere per aggiungere dQ è pari a $(Q/C)\,\mathrm{d}Q$]. Questo spiega anche perché l'equivalente della costante elastica è $1/C$: minore è C, maggiore è la tensione ai capi del condensatore a parità di carica applicata e quindi più difficile è caricarlo.

Possiamo finalmente scrivere la seguente tabella di analogie:

$$
\begin{aligned}
x &\leftrightarrow Q && (358)\\
v &\leftrightarrow I && (359)\\
a &\leftrightarrow \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} && (360)\\
m &\leftrightarrow L && (361)\\
k &\leftrightarrow \frac{1}{C} && (362)\\
\beta &\leftrightarrow R && (363)\\
\frac{1}{2}\,m\,v^2 &\leftrightarrow \frac{1}{2}\,L\,I^2 && (364)
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{2}\,k\,x^2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\,\frac{1}{C}\,V^2 \tag{365}$$

$$\beta\,v^2 \quad \leftrightarrow \quad R\,I^2 \tag{366}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \tag{367}$$

nella quale si è introdotta l'energia $1/2\,L\,I^2$ associata ad L.
Se β, o rispettivamente R, è diverso da zero, l'oscillazione è smorzata, in quanto ogni volta che la velocità, o rispettivamente la corrente, è diversa da zero viene dissipata energia con una potenza pari a $\beta\,v^2$, ovvero $R\,I^2$.

Per quanto riguarda la **soluzione della (355)**, ricordiamo che il procedimento è quello di partire da una soluzione di prova complessa (la cui parte reale costituisce la soluzione fisica) del tipo $K\,e^{\alpha\,t}$, la quale, inserita nella (355) dà luogo a

$$\alpha^2\,K\,e^{\alpha\,t} + \gamma\,\alpha\,K\,e^{\alpha\,t} + \omega^2\,K\,e^{\alpha\,t} \;=\; 0 \tag{368}$$

da cui segue l'equazione *algebrica associata*

$$\alpha^2 + \gamma\,\alpha + \omega^2 \;=\; 0 \tag{369}$$

le cui soluzioni sono

$$\alpha_{1,2} \;=\; -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\,. \tag{370}$$

Essendo sia α_1 che α_2 soluzione della (355), la soluzione generale è data da

$$z(t) \;=\; K_1\,e^{\alpha_1\,t} + K_2\,e^{\alpha_2\,t}\,. \tag{371}$$

Il tipo di soluzioni dipende dal segno del discriminante $(\gamma/2)^2 - \omega_0^2$:

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 > 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ reali negative: caso `sovrasmorzato'} \tag{372}$$

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 < 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ complesse coniugate: caso `sottosmorzato'} \tag{373}$$

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \alpha_2 \text{ (reale negativa): caso `critico'}\,. \tag{374}$$

Problemini

(a) Una bobina di autoinduttanza $L = 100\,\mathrm{mH}$ è attraversata da una corrente continua di $0.5\,\mathrm{A}$. Calcolare l'energia immagazzinata nella bobina.

(b) Un circuito di resistenza trascurabile ha una capacità di $10\,\mathrm{nF}$ e un'induttanza di $100\,\mathrm{mH}$. Calcolare la frequenza propria del circuito.

(c) Un circuito costituito da un condensatore di 50 nF, un'induttanza di valore incognito L e resistenza trascurabile: sapendo che la tensione ai capi del condensatore in funzione del tempo è data da $V_C = V_{C_0} \cos \omega t$, con $\omega = 10^5\,\mathrm{s}^{-1}$, calcolare il valore di L, il massimo valore dell'intensità di corrente che fluisce nel circuito e il massimo valore della differenza di tensione ai capi di L.

Esercitazione: rassegna dei problemi d'esame della sessione estiva 2004.

26. **Lunedi 23/5, 14:00-16:00**

Soluzione dell'oscillatore smorzato, sia meccanico che elettrico, con le **condizioni iniziali**

$$z(0) = z_0 \tag{375}$$
$$\dot{z}(0) = 0\,, \tag{376}$$

ovvero: allungamento iniziale della molla e velocità nulla nel caso meccanico; carica iniziale del condensatore e corrente nulla nel caso elettrico. Le due condizioni danno:

$$K_1 + K_2 = z_0 \tag{377}$$
$$\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 = 0 \tag{378}$$

da cui

$$K_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\, z_0 \tag{379}$$
$$K_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\, z_0\,. \tag{380}$$

Nota: α_1 e α_2 dipendono dai parametri del sistema; K_1 e K_2 dalle condizioni iniziali e dai parametri del sistema.

Vediamo i due casi più interessanti (trattando il caso critico come caso limite di quello sottosmorzato):

$\boxed{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 > 0}$ Indicando con

$$\alpha_1 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \tag{381}$$
$$\alpha_2 = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \tag{382}$$

e chiamando $\tau_1 = -1/\alpha_1$ e $\tau_2 = -1/\alpha_2$ (con $\tau_1 > \tau_2 > 0$), la soluzione diventa

$$z(t) = K_1\, e^{\alpha_1 t} + K_2\, e^{\alpha_2 t} \tag{383}$$

$$= z_0 \left[\frac{\alpha_2}{\alpha 2 - \alpha_1} \, e^{\alpha_1 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \, e^{\alpha t} \right] \tag{384}$$

$$= z_0 \left[\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \, e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \, e^{-t/\tau_2} \right] . \tag{385}$$

I due esponenziali negativi hanno coefficienti di segno opposto, fatto importante per produrre $\dot{z}(0) = 0$. Ma l'esponenziale con $K_2 < 0$ si estingue rapidamente e, dopo alcuni τ_2, prevale l'esponenziale con $K_1 > 0$.

$\boxed{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 < 0}$ Introducendo $\omega_1^2 = \omega_0^2 - (\gamma/2)^2 > 0$, indichiamo le due soluzioni con

$$\alpha_1 = -\frac{\gamma}{2} + j\,\omega_1 \tag{386}$$

$$\alpha_2 = -\frac{\gamma}{2} - j\,\omega_1 \,, \tag{387}$$

da cui

$$K_1 = \frac{-\frac{\gamma}{2} - j\,\omega_1}{-2\,j\,\omega_1} \, z_0 = z_0 \left(\frac{1}{2} - j\,\frac{\gamma}{4\,\omega_1} \right) \tag{388}$$

$$K_2 = \frac{-\frac{\gamma}{2} + j\,\omega_1}{2\,j\,\omega_1} \, z_0 = z_0 \left(\frac{1}{2} + j\,\frac{\gamma}{4\,\omega_1} \right) . \tag{389}$$

La soluzione è quindi

$$z(t) = \frac{z_0}{2} \left(1 - j \frac{\gamma}{2\,\omega_1} \right) \, e^{-\gamma/2\,t} \, e^{j\,\omega_1\,t} \tag{390}$$

$$+ \frac{z_0}{2} \left(1 + j \frac{\gamma}{2\,\omega_1} \right) \, e^{-\gamma/2\,t} \, e^{-j\,\omega_1\,t} \tag{391}$$

la cui parte reale è (provare a fare i conti come esercizio, ricordandosi che[2] $e^{j\,x} = \cos x + j \sin x$)

$$Z(t) = \mathrm{Re}\, z(t) = z_0 \, e^{-t/\tau} \left[\cos(\omega_1\,t) + \frac{\gamma}{2\,\omega_1} \, \sin(\omega_1\,t) \right] \tag{392}$$

con $\tau = 2/\gamma$. [Si verifichi che $Z(0) = z_0$ e $\dot{Z}(0) = 0$.]

[2] Espandendo in serie di Taylor $e^{j\,x}$, $\sin x$ e $\cos x$ si ottiene:

$$e^{j\,x} = 1 + j\,x - \frac{x^2}{2!} - j\,\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j\,\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - j\,\frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots .$$

da cui $e^{j\,x} = \cos x + j \sin x$.

Si può verificare inoltre[3] che la (392) può essere riscritta come

$$Z(t) \;=\; \frac{z_0}{\cos\varphi}\, e^{-t/\tau}\, \cos\left(\omega_1\, t + \varphi\right), \tag{393}$$

con $\varphi = \arctan(-\gamma/2\,\omega_1)$ e quindi $\cos\varphi = 1/\sqrt{1+(\gamma/2\omega_1)^2}$.
La (393), più facile da leggere e da memorizzare dell'equivalente (392), ci mostra uno moto oscillante con ampienza decrescente nel tempo in modo esponenziale. Si noti che $\omega_1 < \omega_0$, ovvero $T_1 > T_0$: lo smorzamento rallenta l'oscillazione.

$\boxed{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 = 0}$ Questa condizione si ottiene come limite per $\omega_1 \to 0$. Dalla (392), sviluppando in serie, otteniamo[4] otteniamo:

$$Z(t) \;\approx\; z_0\, e^{-t/\tau} \left[1 - \frac{(\omega_1\, t)^2}{2} + \frac{\gamma}{2\,\omega_1}(\omega_1\, t)\right], \tag{394}$$

che per $\omega_1 \to 0$ diventa

$$\begin{aligned} Z(t) &= z_0\, e^{-t/\tau} \left[1 + \frac{\gamma}{2}\, t\right] && (395)\\ &= z_0\, e^{-t/\tau} \left[1 + \frac{t}{\tau}\right]. && (396) \end{aligned}$$

[Si verifichi che $Z(0) = z_0$ e $\dot{Z}(0) = 0$.]

---

[3] Con un po' di trigonometria si può vedere come $(1/\cos\varphi)\,\cos(\omega_1 t + \varphi)$ può essere riscritta come

$$\begin{aligned} (1/\cos\varphi)\,\cos(\omega_1 t + \varphi) &= \frac{1}{\cos\varphi}[\cos\omega_1 t \cdot \cos\varphi - \sin\omega_1 t \cdot \sin\varphi] \\ &= \cos\omega_1 t - \tan\varphi \cdot \sin\omega_1 t \\ &= \cos\omega_1 t + \frac{\gamma}{2\omega_1}\,\sin\omega_1 t\,. \end{aligned}$$

Si ricordi inoltre che $\cos(\arctan\alpha) = 1/\sqrt{1+\alpha^2}$.

[4] Si ricorda che per $\epsilon \ll 1$

$$\begin{aligned} \sin\epsilon &\approx \epsilon \\ \cos\epsilon &\approx 1 - \frac{\epsilon}{2}\,. \end{aligned}$$

Altre utili approssimazioni

$$\begin{aligned} e^{\epsilon} &\approx 1 + \epsilon \\ (1+\epsilon)^2 &\approx 1 + 2\,\epsilon \\ \sqrt{(1+\epsilon)} &\approx 1 + \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{1}{1+\epsilon} &\approx 1 - \epsilon \end{aligned}$$

Problemi

(a) Un corpo di 800 g, legato all'estremità di una molla, è anche soggetto a una forza di viscosità del tipo $-\beta\, v$. Sapendo che l'ampiezza delle oscillazioni si è ridotta di $1/e$ in 5 minuti, trovare il coefficiente β.

(b) Un corpo di 1 kg è legato all'estremo di una molla di costante elastica $k = 45\,\mathrm{N/m}$. Calcolare il massimo coefficiente di viscosità β affinché il corpo effettui almeno una oscillazione prima di tornare alla sua posizione di equilibrio.

(c) Un corpo, sospeso ad una molla oscilla senza attriti con un periodo di 0.5 secondi. Successivamente, posto in un mezzo viscoso, esso oscilla con pseudoperiodo di 0.513 secondi. Calcolare il rapporto fra coefficiente di viscosità e la massa del corpo.

(d) Un condensatore di 5 nF, inizialmente a 10 V, viene fatto scaricare su una resistenza di 150 Ω e un'induttanza di 10 mH posti in serie. Calcolare lo pseudoperiodo dell'oscillazione smorzata.

(e) Sul problema precedente: calcolare la tensione ai capi del condensatore dopo la prima oscillazione (ovvero dopo uno pseudoperiodo dall'inizio della scarica).

(f) Ancora sul problema precedente: calcolare l'energia persa dal sistema durante la prima oscillazione.

Esercitazioni (seconda ora).

27. **Giovedi 26/5, 18:00-19:00**

Corpi estesi: possono traslare (moto del baricentro) e ruotare. Definizione di corpo rigido.
Forze possono cambiare stato di rotazione: coppia: forze opposte, non sulla stessa retta di applicazione (sia b la distanza fra le due rette):

- somma delle forze esterne è nulla: v_{cm} non cambia (per semplicità ci concentriamo su corpi fermi);
- accelerazione angolare, che dipende da: F; b; massa del corpo; disposizione delle masse.

Caso frequente: una sola forza 'attiva', essendo l'altra forza della coppia una reazione vincolare. Esempio: corpo vincolato a ruotare su un asse mantenuto fermo. Immaginiamo un disco libero di ruotare intorno al proprio asse. Momento del vettore forza:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \tag{397}$$
$$(\ M = r \cdot F \cdot \sin\theta\ ) \tag{398}$$

(Nota: il concetto di 'momento' è applicabile, in principio, a qualsiasi vettore e va riferito rispetto ad un punto ('polo'): "momento del vettore forza rispetto all'origine", etc.)
La (398) si può riscrivere nel seguente modo:

$$M \;=\; F\cdot(r\sin\theta) = F\cdot r_\perp\,, \tag{399}$$

con $r_\perp$ proiezione di $\vec{r}$ perpedicolare alla direzione della forza, ovvero braccio della forza (b).
$\vec{M}_{tot} = \sum_i \vec{M}_i$ in quanto $F_{tot} = \sum_i \vec{F}_i$. Coppia rivista in termine di somma di momenti delle due forze: $M = F\cdot b$ indipendentemente dall'asse che si considera per calcolare i momenti. Regola della mano destra con le dita curvate verso l'interno del palmo (e della vite 'destorsa' che si avvita): se il verso di 'avvitamente' è quello della rotazione causata dalla forza, il momento è diretto, rispettivamente, lungo il pollice (verso l'unghia) o lungo l'asse della vite (verso la punta).
Unità di misura di momento della forza: Newton $\times$metro (N·m), vedi dati sui motori (es di scooter 150 cc: "coppia massima 14 N m a 7000 giri/min").
Momento delle forza e **momento della quantità di moto**: $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times(m\vec{v}) \rightarrow \vec{M} = \mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t$ (caso di polo o asse fisso, il solo che ci interessa in questo corso). $\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{L}_i$. Corpo che ruota: $\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{r}_i\times(m\vec{v})$: lungo l'asse di rotazione tutti i punti ruolano con stassa velocità angolare ω: ci concentriamo sul modulo (omettiamo *tot*): $L = \sum_i r_i m_i v_i = \sum_i r_i m_i r_i \omega = (\sum_i m_i r_i^2)\omega$ (se tutta la massa è alla stessa distanza dall'asse, es. ruota bicicletta, $L = (mr^2)\omega$). In genere bisogna fare la sommatoria o l'integrale sugli elementi di massa.
Continuiamo considerando M e L lungo un asse prefissato. da $M = \mathrm{d}L/\mathrm{d}t$, $\rightarrow M = \mathrm{d}/\mathrm{d}t[(\sum_i m_i r_i^2)\omega] = \mathrm{d}/\mathrm{d}t[I\omega] = I\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = I\dot{\omega}$ (se I fisso). Analogia con "$F = ma$": I acquista il ruola di 'coefficiente di inerzia': **Momento di inerzia**.
Analogie fra moto traslazione (1-D per semplicità) e moto rotazionale intorno ad asse.

$$x \;\longleftrightarrow\; \theta \tag{400}$$
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \;\longleftrightarrow\; \omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{401}$$
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} \;\longleftrightarrow\; \dot{\omega} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{402}$$
$$m \;\longleftrightarrow\; I \tag{403}$$
$$p = mv \;\longleftrightarrow\; L = I\omega \tag{404}$$
$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = ma \;\longleftrightarrow\; M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = I\dot{\omega} \tag{405}$$
$$\mathrm{d}W = F\mathrm{d}x \;\longleftrightarrow\; \mathrm{d}W = M\mathrm{d}\theta \tag{406}$$

$$(W\text{: lavoro}) \tag{407}$$

$$P = F\,v \quad \longleftrightarrow \quad M\,\omega \tag{408}$$

$$E_c^{(trasl)} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \longleftrightarrow \quad E_c^{(rot)} = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{409}$$

$$F^{(ext)} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{tot} = cost \quad \longleftrightarrow \quad M^{(ext)} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{tot} = cost \tag{410}$$

Energia cinetica totale: $E_c^{tot} = E_c^{trasl} + E_c^{rot} = \frac{1}{2}m_{tot}v_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$.

Condizioni di equilibrio di un corpo rigido (da una condizione $\vec{v}_{CM} = 0$ e $\omega = 0$): devono essere nulla sia la risultante delle forze esterne che la risultante dei momenti delle forze:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}^{(ext)} = 0 \\ \vec{M}^{(ext)} = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{p} = \text{cost} \\ \vec{L} = \text{cost} \end{array} \right. \tag{411}$$

Caso speciale in cui ω può cambiare anche in assenza di momenti di forze esterne: $L = I\omega = k$, ma se I cambia, cambia anche ω per conservare L. **Esperimento sedia girevole**.
Altri **esperimenti in aula**. Giroscopio: modulo, direzione e verso di L; momento della forza gravitazionale sul giroscopio; moto 'antiintuitivo' del giroscopio dovuto al fatto che, istante per istante, vale $\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M} \cdot \mathrm{d}t$, ovvero $\vec{L}(t + \mathrm{d}t) = \vec{L}(t) + \mathrm{d}\vec{L} = \vec{L}(t) + \vec{M} \cdot \mathrm{d}t$.

Problemi

(a) Uno scooter ha una coppia massima di 14 N·m a 7000 giri al minuto. Calcolare la potenza dello scooter a tale regime del motore.

(b) Uno scooter ha una potenza massima di 11.8 HP a 8500 giri/min. calcolare la coppia a tale regime del motore.

(c) Un corpo in rotazione intorno al proprio asse a 1000 giri al minuto ha una energia cinetica di rotazione pari a 1000 J. calcolare il momento di inerzia del corpo.

(d) Una ruota di raggio $R = 30\,\text{cm}$ e massa pari ad 1 kg è posta in rotazione il proprio asse ad una velocità tale che la ruota, lasciata libera al suolo, andrebbe ad una velocitd̀ di 40 km/h. Immaginando che tutta la massa della ruota sia concentrata a distanza R, calcolare l'energia cinetica della ruota.

(e) Un corpo in rotazione intorno al proprio asse subisce un dimezzamento del momento di inerzia. Calcolare la variazione di velocità anolare.

(f) Una barretta lunga 1 m, con agli estremi due masse di 1 kg ciascuna ruota con una velocità angolare di $100\,\text{s}^{-1}$. Improvvisamente le due masse sono avvicinate finché la loro distanza si dimezza. Calcolare la variazione di velocità angolare e la variazione di energia.

(g) Una forza di intensità $(5, 0, 0)\,$N è applicata al punto $(0, 2, 0)\,$m. Calcolare il momento della forza.

(h) Un corpo ruota ad una velocità angolare di $10\,\mathrm{s}^{-1}$. Ad un certo istante il corpo è soggetto ad un'accelerazione angolare di $1\,\mathrm{s}^{-2}$ che dura 10 secondi. Trovare la velocità angolare finale.

(i) Un corpo libero di ruotare intorno al proprio asse e inizialmente fermo è soggetto ad un'accelerazione angolare di $1\,\mathrm{s}^{-2}$ che dura 10 secondi. Calcolare la velocità angolare finale e la rotazione totale del corpo (sia in radianti che in gradi).

28. **Venerdi 27/5, 14:00-16:00**

Applicazione dei momenti delle forze: leve (Asta rigida che ruota intorno ad un punto fisso detto *fulcro*). Momenti delle forze rispetto al fulcro condizione di equilibrio: $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$.
"*Datemi un punto di appoggio e vi solleverò la Terra!*"
Terminologia classica delle leve: (forza di) 'potenza' (P) e (forza di) 'resistenza' (R); 'braccio di potenza' (p) e braccio di resistenza (r); condizione di equilibrio ($r\,R = p\,P$, ovvero $P = R\,r/p$); classificazione delle leve in 'vantaggiosa' ($p > r$), 'svantaggiosa' ($p < r$) e indifferente ($p = r$). Tipi (o 'generi') di leve:

1^o) fulcro fra 'potenza' e 'resistenza': può essere vantaggiosa, svantaggiosa o indifferente a seconda della posizione del fulcro;

3^o) 'resistenza' fra fulcro e 'potenza' (es. carriola): è per definizione solo vantaggiosa, in quanto $p > r$;

3^o) 'potenza' fra fulcro e 'resistenza' (es. mollette e bicipiti): è per definizione solo svantaggiosa, in quanto $p < r$.

Calcolo del momento di inerzia di un disco rigido 'sommando' i contributi degli infiniti anelli concentrici di spessore infinitesimo dr posti a distanza r. Siccome ogni anello 'rettificato' è visto come un parallelepipedo di lati $2\pi r$ ('circonferenza rettificata'), dr e h (lo spessore del disco): $\mathrm{d}m = \rho \cdot 2\pi r h \mathrm{d}r$, con ρ la densità, ovvero $\mathrm{d}m = 2\pi\rho h r \mathrm{d}r$.

– Massa del disco

$$\int_0^R \mathrm{d}m \;=\; \int_0^R 2\pi\rho h r \mathrm{d}r = \rho\,\pi R^2\,h \tag{412}$$

(densità × superficie × spessore).

– Momento di inerzia dell'anello a distanza r:

$$\mathrm{d}I = r^2 \mathrm{d}m = 2\pi\rho h r^3 \mathrm{d}r\,. \tag{413}$$

Momento di inerzia dell'intero disco

$$I = \int_0^R \mathrm{d}I \;=\; \int_0^R 2\pi\rho h r^3 \mathrm{d}r \tag{414}$$

$$= \frac{1}{2}\,\pi\rho h R^4 = \frac{1}{2}\,MR^2\,. \tag{415}$$

Per casa: urto anelastico su bordo del disco a 'parametro di impatto' (ovvero braccio) b.

Oscillatore smorzato: considerazioni energetiche.
Riprendiamo oscillatore smorzato, caso sottosmorzato, di cui riscriviamo la soluzione nella forma (393)

$$Z(t) \;=\; \frac{z_0}{\cos\varphi}\,e^{-t/\tau}\,\cos\left(\omega_1\,t+\varphi\right) \tag{416}$$

e ci ricordiamo che a seconda dei problemi incontrati Z ha il significato dello scostamento x rispetto alla posizione di equilibrio o di carica Q. Concentriamoci sul caso meccanico (quello elettrico è assolutamente equivalente), ovvero

$$x(t) \;=\; \frac{x_0}{\cos\varphi}\,e^{-t/\tau}\,\cos\left(\omega_1\,t+\varphi\right). \tag{417}$$

Energia meccanica all'istante $t=0$ e dopo n periodi, nell'approssimazioni che l'oscillatore è poco smorzato e quindi $\omega_1 \approx \omega_0$:

$$E_0 = E(n=0) \;=\; \frac{1}{2}\,k\,x_0^2 \tag{418}$$

$$E(n) \;=\; \frac{1}{2}\,k\,x_0^2\,e^{-2\,n\,T_1/\tau} \tag{419}$$

$$= E_0\,e^{-(2\pi\gamma/\omega_1)\,n} \tag{420}$$

$$\approx E_0\,e^{-(2\pi\gamma/\omega 0)\,n}\,. \tag{421}$$

Il rapporto fra $E(n+1)/E(n)$ da un periodo all'altro vale

$$\frac{E(n+1)}{E(n)} \;=\; e^{-(2\pi\gamma/\omega_0)}\,, \tag{422}$$

ovvero in un periodo abbiamo una variazione frazionaria di

$$\frac{E(n+1)-E(n)}{E(n)} \;\approx\; e^{-(2\pi\gamma/\omega_0)}-1 \tag{423}$$

$$\approx\; 1-\frac{2\,\pi\,\gamma}{\omega_0}-1 \tag{424}$$

$$\approx\; -\frac{2\,\pi\,\gamma}{\omega_0}\,, \tag{425}$$

ove abbiamo usato nel penultimo passaggio l'approssimazione $e^{-\epsilon} \approx 1 - \epsilon$. Inoltre, possiamo riscrivere la (421) come

$$
\begin{aligned}
E(n) &\approx E_0 \, e^{-n/n_c} && (426)\\
(\, n_c &= \frac{1}{2\,\pi} \frac{\omega_0}{\gamma} \;) \, . && (427)
\end{aligned}
$$

ove n_c acquista il significato di 'numero di oscillazioni che l'oscillatore impiega per ridurre ad $1/e$ la sua energia iniziale: $\rightarrow$ altro andamento esponenziale! Ovviamente, essendo il numero di periodi proporzionale al tempo trascorso, in quanto $t = n\,T = n\,(2\pi/\omega_0)$, e considerando l'andamento 'medio' dell'energia, valido ad ogni numero intero di periodi (l'andamento esatto è un po' più complicato, in quanto la variazione dell'energia nell'unità di tempo è proporzionale al quadrato della velocità istantanea), otteniamo

$$
< E(t) > \;\; \approx \;\; E_0 \, e^{-\gamma\, t} = E_0 \, e^{-t/\tau_E} \, , \qquad (428)
$$

con $\tau_E = 1/\gamma$: l'andamento dell'energia nel tempo è esponenziale, con una costante di tempo inversamente proporzionale al coefficiente di viscosità β (o l'equivalente elettrico R nel circuito RLC).

Fattore di qualità (o di merito) di un circuito smorzato. Definizione:

$$
Q \;\; = \;\; \frac{\omega_0}{\gamma} \, . \qquad (429)
$$

(Da non confondere con il simbolo della carica elettrica). Possiamo riscrivere le (425) e (427) come

$$
\begin{aligned}
\frac{E(n+1) - E(n)}{E(n)} &\approx -\frac{2\,\pi}{Q} && (430)\\
n_c &\approx \frac{Q}{2\,\pi}, && (431)
\end{aligned}
$$

ovvero

- maggiore è il fattore di merito e minore è l'energia frazionaria persa per ogni oscillazione e, di conseguenza, maggiore il numero di oscillazioni prima che il sistema abbia perso una certa frazione prefissata di energia;
- in particolare, la (431) ci dice che $Q/2\pi$ rappresenta (approssimativamente) il numero di oscillazioni necessarie affinchè l'energia del sistema si riduca di $1/e$ di quella iniziale.

Il termini dei parametri del sistema Q vale:

$$
\text{Oscillatore meccanico:} \qquad Q = \frac{1}{\beta}\sqrt{m\,k} \qquad (432)
$$

$$
\text{Oscillatore elettrico:} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \, . \qquad (433)
$$

Oscillatore forzato Riprendiamo l'equazione (344) e aggiungiamo una forza periodica sinusoidale[5] $f(t) = f_0 \cos\omega t$. la forza totale sarà quindi

$$F = -k\,x - \beta\,v + f_0\,\cos\omega t \tag{434}$$

la (344) e seguenti diventano quindi

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \beta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\,x = f_0\,\cos\omega t \tag{435}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\beta}{m}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,x = \frac{f_0}{m}\,\cos\omega t \tag{436}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x = \eta\,\cos\omega t\,. \tag{437}$$

Analogalmente, se nel circuito RCL aggiungiamo una forza elettromotrice cariabile nel tempo $f(t) = f_0\,\cos\omega t$, la (353) e seguenti diventano

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L\,C}\,Q = f_0\,\cos\omega t \tag{438}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \omega^2\,Q = \frac{f_0}{L}\,\cos\omega t\,, \tag{439}$$

formalmente analoga alla (437) . Risolviamo quindi la generica

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega^2\,z = \eta_0\,\cos\omega t\,, \tag{440}$$

ove η_0 sta per f_0/m o f_0/L, a seconda che si tratta del caso meccanico o elettrico (si noti che in entrambi i casi il denominatori rappresenta un termine di inerzia). Si noti come nel caso meccanico $f_0/m\,\cos\omega t$ rappresenta l'accelerazione dovuta alla sola forza $f(t)$.
Come è noto, la soluzione della (440) è pari alla somma della soluzione omogenera e di quella particolare. Come abbiamo visto precedentemente, la soluzione omogenea (ovvero quella con $\eta_0 = 0$) dà luogo ad una soluzione smorzata che asintoticamente si estingue. Dopo $\approx 5\,Q$ oscillazioni (ove Q è il fattore di merito) resta soltanto la soluzione particolare, 'forzata' alla stessa frequenza di $f(t)$. Quindi la soluzione sarà del tipo $z(t) = z_0\,\cos(\omega t + \varphi)$. Come è anche noto, i conti si semplificano se usiamo la notazione complessa, ovvero: consideriamo $\eta_0 \cos\omega t = \mathrm{Re}[\eta_0\,e^{j\omega t}]$; usiamo la variabile complessa $z = z_0\,e^{j\omega t}$, ove z_0 è essa stessa una variabile complessa, e contenente quindi la fase φ; risolviamo

[5] L'importanza dello studio di moti periodici sinusoidali è lagato al teorema di Fourier, attraverso è possibile scrivere qualsiasi funzione periodica come una opportuna combinazioni di sinusoidi.

la (440) per variabili complesse e infine prediamo la parte reale del risultato. Sostituendo la soluzione di prova $z = z_0\, e^{j\omega t}$ nella (440) otteniamo

$$\begin{aligned} -\omega^2\, z_0\, e^{j\omega t} + j\omega\,\gamma\, z_0\, e^{j\omega t} + \omega_0^2\, z_0\, e^{j\omega t} &= \eta_0 \cos\omega t & (441)\\ z_0\,(-\omega^2 + j\omega\,\gamma + \omega_0^2) &= \eta_0 & (442)\\ z_0 &= \frac{\eta_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\,\gamma}\,, & (443) \end{aligned}$$

dalla quale si ricavano[6] ampiezza di z, che scriviamo con Z_0 e la sua fase φ:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{\eta_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} & (444)\\ \varphi &= \arctan\frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\,, & (445) \end{aligned}$$

ovvero la soluzione completa è

$$z(t) = \frac{\eta_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \cos\left[\omega t + \arctan\frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right] \qquad (446)$$

Discussione del risultato: → **risonanza**.
Per $\omega = \omega_0$ (ω_0 è detta frequenza di risonanza) l'ampiezza di oscillazione ha un massino e vale $\eta_0/\gamma\omega_0$, inversamente proporzionale al coefficiente del termine dissipativo (β o R nei due casi).

29. **Lunedi 30/5, 14:00-16:00**

Fluidi: densità e pressione (Pascal, Pa). Legge di Stevino e legge di Pascal. Vasi comunicanti, manometro a mercurio, martinetto idraulico e barometro di Torricelli. Principio di Archimede.
Vedi dispense V. Ferrari, pp. 139-146

Esercizi

(a) Una stanza è depressurizzata, ovvero tenuta ad una pressione inferiore del 20% rispetto alla pressione atmosferica. Calcolare la forza che agisce su una finestra alta 2 m e larga 1.2 m.
(b) Un orologio è garantito fino a 10 atmosfere: fino a che profondità può essere immerso in acqua?

[6] Si ricorda che i numeri complessi possono essere rappresentati in un piano cartesiano ('piano complesso') come un punto avente per ascissa la sua parte reale e per ordinata la sua parte immaginaria. Il modulo rappresenta quindi la distanza del punto dall'origine e la fase l'angolo formato fra il segmento congiungente punto-origine e l'asse delle ascisse. Modulo e fase sono quindi calcolati dalle usuali formule di geometria e trigonometria.

Valgono inoltre le seguenti regole pratiche: 1) il modulo di un prodotto o di un rapporto di n umeri complessi è pari, rispettivamente, a prodotto o rapporto dei moduli; 2) la fase di un prodotto o di un rapporto di n umeri complessi è pari, rispettivamente, a somma o differenza delle fasi.

(c) Si considerino due recipienti a sezione circolare. Il recipiente A ha un diametro di 20 m ed è alto 15 metri. Il recipiente B è semplicemente un tubo di diametro 4 cm e altezza 30 metri. In quale dei due recipienti c'è maggiore pressione sul fondo?

(d) Un martinetto idraulico ha un cilindro di 30 cm e l'altro di 0.5 cm. In entrambi i cilindri, sopra il liquidi, sono disposti due pistoni che possono scorrere senza attrito. Sapendo che il liquido è in equilibrio e che pistone posto nel cilidro più stretto ha una massa di 100 g calcolare la massa dell'altro pistone.

(e) Due vasi comunicanti (attraverso un foro posto nel fondo) contengono uno mercurio e l'altro acqua. Sapendo che il mercurio ha una densità di 13.3 g/cm^3, che la colonnina di mercurio è alta 76 cm e che i due liquidi sono in equilibrio, calcolare l'altezza della colonna di acqua.

(f) Un pallone ad elio ha un diametro di 1 m. Assumendo la densità dell'elio trascurabile rispetto a quella dell'aria, calcolare la massa massima dell'involucro del pallone affinché esso riesca a volare.

(g) Ad un pallone di calcio regolamentare, di massa 430 g e circonferenza 69 cm, viene legato un peso di 5 kg e gettato in acqua. Dire, giustificandone il motivo, se il pallone affonda o no.

(h) Sapendo che la densità del ghiacchio di acqua pura è di 920 kg/m^3 e la densità dell'acqua marina ̀di 1025 kg/m^3, calcolare la frazione di volume di un iceberg che affiora dalla superficie del mare.

(i) Approssimiamo una chiatta con un grosso parallelepipedo di lunghezza 20 m larghezza 6 m e altezza 4 metri. Sapendo che la parte immersa della chiatta è di 3 m, determinare il peso complessivo di chiatta, carico ed equipaggio.

Esercitazioni

30. **Venerdi 3/6, 14:00-16:00**

Esercitazioni