G. D'Agostini

Appunti di Fisica 1

(Corso per Informatici, Canale P-Z, A.A. 05/06)

1 Giovedi 2/3, 18:00–19:00

1.1

Introduzione corso e informazioni varie. In particolare, si ricordano gli obiettivi del corso:

> *Vengono presentati alcuni concetti di base della fisica riguardanti la meccanica del punto, la termodinamica e i fenomeni elettrici: velocità, accelerazione, forze e campi di forze, massa, cariche, energia, temperatura, corrente elettrica, etc. Il corso ha sia una finalità; propedeutica ai successivi corsi di Fisica 2 e Fisica 3 che formativa in senso generale. Infatti per gran parte degli studenti questa è; la prima occasione in cui si fa uso di modelli matematici per descrivere problemi della realtà; nelle cui soluzioni si usano un certo numero di strumenti matematici appresi nella scuola media superiore e nel primo anno del corso di laurea.*

1.2

Consegna test di autovalutazione (correzione → tutoraggio giovedi 9/3).

1.3

Introduzione alla dinamica mediante l'uso di concetti intuitivi e di 'cultura generale': spazio, tempo, posizione, velocità, forza e principio di inerzia.

Cinematica: ci occupiamo inizialmente dello studio della variazione della posizione degli 'oggetti' nello spazio in funzione del tempo, senza interessarci delle cause di tali variazioni (→ *dinamica*). Precisazioni:

- Moto rispetto a chi? → *Sistema di riferimento.*
- Moto di chi? → Schematizzazione di *punto materiale.*

- Di quanti numeri abbiamo bisogno per indicare univocamente la posizione di un punto P nello spazio? $\Rightarrow$ 3:
  - Distanza d da un punto scelto come riferimento ('origine'), più due angoli (equivalenti a longitudine e latitudine, che diano la posizione sulla superficie della sfera identificata da d: $P = \{d, \theta, \phi\}$ (d è spesso indicata con r o R).
  - Assi cartesiani $P = \{x, y, z\}$ (terna orientata!)

Tempo: concetto intuitivo (memento "*penso di sapere cos'è finché non me lo chiedono...* — Sant'Agostino) e sua misura mediante opportuni orologi basati su fenomeni che *assumiamo* ciclici e regolari. Definizione storica del secondo dalla suddivisione del giorno in 24 ore di 60 minuti di 60 secondi. Scrittura della *grandezza fisica* tempo (*particolare*): *valore numerico* e *unità di misura*, ad es. $t = 3.53\,\mathrm{s}$, $t = 2.5\,\mathrm{h}$, etc.

Scelta dello *zero del tempo*: dipende dal problema (dal momento in cui si comincia ad osservare un fenomeno) e puèssere anche negativo ($t = -0.5\,\mathrm{s} \rightarrow$ mezzo secondo prima dell'istante di riferimento).

Spazio: anche questo concetto è più o meno intuitivo (vedi Kant). Dal punto di vista fisico è importante stabilire delle procedure per misurare le distanze. Unità di misura del *Sistema Internazionale*: metro (la cui definizione storica è quella di decimilionesima parte del quarto di meridiano terrestre, ovvero della distanza polo-equatore presa lungo la superficie terrestre). Grandezza fisica (particolare) spazio, anch'essa caratterizzata da valore numerico ed unità di grandezza, ad es. $t = 2.8\,\mathrm{m}$, $t = 123.12\,\mathrm{cm}$, etc.

Moto *unidimensionale* sia *rettilineo*, ovvero $s(t) = x(t)$, che *curvilineo*, in cui $s(t)$ è lo spazio percorso lungo la traiettoria curvilinea dall'istante $t = 0$. Esempi: centometrista rispetto a quattrocentometrista.

2 Venerdi 3/3, 14:00–16:00

2.1

Note sui libri di testo e su possibili esoneri (vedi sito del corso).

2.2

Costruzione della traiettoria date le coordinate in funzione del tempo, esempi:

Esempio 1 (moto parabolico)

$$x(t)/\mathrm{m} = 2\,t/\mathrm{s} \tag{1}$$
$$y(t)/\mathrm{m} = -5\,t^2/\mathrm{s}^2 + 5\,, \tag{2}$$

o, anche più semplicemente, ma prestando attenzione alle unità di misura,

$$x(t) = 2\,t \tag{3}$$
$$y(t) = -5\,t^2 + 5\,. \tag{4}$$

Meglio ancora

$$x(t) = 2\,(\mathrm{m/s})\,t \tag{5}$$
$$y(t) = -5\,(\mathrm{m/s^2})\,t^2 + 5\,\mathrm{m}\,. \tag{6}$$

Per trovare la curva che lega x a y (traiettoria) è sufficiente calcolare le coppie $\{x, y\}$ per alcuni valori di t e tracciare i punti su un grafico ($\Rightarrow$ provare a fare a casa, eventualmente cambiando i valori numerici).

Esempio 2 (moto circolare)

$$r(t)/\mathrm{m} = 10 \tag{7}$$
$$\alpha(t)/\mathrm{rad} = (\pi/2)\,t\,. \tag{8}$$

Si tratta di coordinate polari su un piano che descrivono il moto di un punto materiale con distanza costante rispetto ad un punto e angolo che varia linearmente con il tempo.

Definizione di radiante: rapporto fra arco di circonferenza e raggio del cerchio. Fattore di conversione radianti-gradi si ottiene ricordando che π radianti $= 180$ gradi, e quindi $\alpha_r = \pi/180 \times \alpha_g$.

Relazione fra angolo e coordinata curvilinea lungo la circonferenza:

$$s(t) = R\,\alpha(t)\,. \tag{9}$$

Check che funziona: quando s è pari a circonferenza, α deve essere pari a $2\,\pi$, da cui $2\,\pi\,R = R\,2\,\pi$.

Passaggio da coordinate polari a coordinate cartesiane:

$$x(t) = R\,\cos\alpha(t) \tag{10}$$
$$y(t) = R\,\sin\alpha(t)\,. \tag{11}$$

Rappresentazione grafica delle curve sinusoidali. Significato di periodo in una funzione sinusoidate (interpretazione grafica).

2.3

Moti unidimensionali. Diagramma orario. Nota ci possiamo interessare a $x(t)$, $x(t)$, $z(t)$ o $s(t)$, ma anche a $r(t)$ o $\alpha(t)$, etc.

Concetto generale di 'velocità': esempio: velocità una stampante $p(t)$ ('pagine') o di di trasferimento di dati: $B(t)$ ('bytes').

Interpretazione dei diversi tratti di un generico diagramma orario $s(t)$: velocità nulla, positiva e negativa, constante e variabile ($\rightarrow$ confrontare tratti percorsi in tempi uguali). Velocità media nel moto unidimensionale. Nota:

- Significato di $v = \Delta x/\Delta t$:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}\,, \tag{12}$$

  ove $t_2 > t_1$ (ovvero l'istante t_2 viene dopo t_1).

  Tipicamente, conviene scegliere $\Delta t > 0$ (freccia orientata dal 'prima' al 'dopo') e quindi il segno di v dipende dal segno di Δx.

Velocità variabile $\rightarrow$ *accelerazione*: accelerazione media nell'intervallo Δt:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}\,, \tag{13}$$

Unità di misura: $\rightarrow$ SI: m, s, m/s, m/s^2. (Ma a volte è più conveniente – 'naturale' — usare altre unità di misura. tipicamente multipli o sottomultipli delle unità di base: km, cm, ora, anno, ns, etc.: $\rightarrow$ *Conversioni*.) Esempio conversione:

$$v = 36\,\mathrm{km/h} = 36\,\frac{1\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} = 36\,\frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 10\,\mathrm{m/s}\,. \tag{14}$$

(fattore di conversione $1/3.6 = 0.2778$, ma evitare di imparare i fattori a memoria, per evitare di sbagliare: meglio rifare i conti — al più si può ricordare che la velocità media di un centometrista è di circa 36 km/h). Importante: abituarsi a scrivere le grandezze fisiche con le rispettive unità di misura (e possibilmente nel SI) e non 'inventarsi' alla fine l'unità di misura del risultato, dopo aver fatto i conti. (Il 'controllo dimensionale' è ottimo check: se le 'dimensioni' non sono quelle attese ci sono degli errori nella formula!)

Velocità come 'pendenza' di $x(t)$ e accelerazione come 'pendenza' di $v(t)$ ('pendenza' $\rightarrow$ attenzione ad unità di misura!).

2.4

Grafico orario di $\alpha(t)$ nel caso lineare, ovvero $\alpha(t) \propto t$. Indicando con ω la costante di proporzionalità:

$$a(t) \;=\; \omega t\,. \tag{15}$$

Quanto più grande è ω, tanto più rapidamente varia l'angolo con il tempo e tanto più inclinato è il grafico α Vs t: ω velocità angolare? Verifichiamo, indicando con v_α la velocità di variazione di α con il tempo:

$$v_\alpha \;=\; \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega t_2 - \omega t_1}{t_2 - t_1} = \omega \quad \Rightarrow \text{OK}\,, \tag{16}$$

$\Rightarrow$ OK , ω è la *velocità angolare*. Conoscendo $\alpha(t)$ ci possiamo ricavare la dipendenza dal tempo della coordinate curvilinea lungo la circonferenza:

$$s(t) \;=\; R\,\alpha(t) = R\,\omega\,t\,. \tag{17}$$

Avendo imparato che, per andamenti lineari, il coefficiente di linearità è la velocità (nel senso generale!), interpretiamo ωR come velocità del punto materiale lungo la circonferenza. Verifichiamo:

$$v \;=\; \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega R t_2 - \omega R t_1}{t_2 - t_1} = \omega\,R. \tag{18}$$

Quanto ci mette a fare un giro intero? Dobbiamo trovare l'intervallo di tempo T tale che $s(T) = 2\,\pi\,R$:

$$s(T) = \omega\,R\,T \;=\; 2\,\pi\,R \tag{19}$$

$$\rightarrow\; T = \frac{2\,\pi}{\omega}\,. \tag{20}$$

[Il modo migliore per ricordare la relazione fra T e ω è $\omega\,T = 2\,\pi$: se un punto cira con velocità angolare ω, esso compie un angolo giro, ovvero $2\,\pi$, nel tempo T.]

Verifichiamo che questa formula del periodo determinato dalla velocità angolare riproduca il periodo delle funzioni sinudoidali che danno le proiezioni del moto circolare uniforme sugli assi cartesiani. Dalla (10), ad esempio, e facendo uso della (20), otteniamo

$$x(T) \;=\; R\,\cos(\alpha(T)) = R\,\cos(\omega\,T) = R\,\cos(2\,\pi) = R\,\cos(0) = x(0)$$

ed idem $y(T) = y(0)$, ovvero dopo un tempo T il punto ritorna sulla stessa posizione: $T \rightarrow$ *periodo.*

2.5

Ancora grafici orari, con accelerazione costante: $x(t)$, $v(t$ e $a(t)$ sulla stessa scala temporale. Problema inverso di quelli precedenti: ora $a(t) \rightarrow v(t) \rightarrow s(t)$. Nei tratti con a costante:

$$\begin{aligned} \Delta v &= a\,\Delta t \Longrightarrow \text{rettangolo sotto la curva } a(t) = k \qquad (21)\\ &\Longrightarrow \textbf{area sotto la curva } a(t) \qquad (22)\end{aligned}$$

Idem, per quanto riguarda la relazione fra v e Δs:

$$\begin{aligned} \Delta s &= v\,\Delta t \Longrightarrow \text{rettangolo sotto la curva } v(t) = k \qquad (23)\\ &\Longrightarrow \textbf{area sotto la curva } v(t)\,. \qquad (24)\end{aligned}$$

Vedremo come, effettivamente, le interpretazioni cinematiche delle aree sotto le curve di $a(t)$ e di $v(t)$ valgono qualsiasi siano tali curve! Ovviamente, noto l'incremento Δv, la velocità finale si ottiene come $v_2 = v_1 + \Delta v$. Analogalmente, per quanto riguarda lo spostamento: $s_2 = s_1 + \Delta s$.

2.6

Problemini proposti:

1. All'istante $t_1 = 10\,s$ un corpo si trova nel punto $x_1 = 5\,\mathrm{m}$. Sapendo che il corpo viaggia con velocità costante $v = -2\,\mathrm{m/s}$, calcolare la posizione all'istante $t_2 = 15\,s$.

2. All'istante $t_1 = 2\,s$ un corpo ha una velocità $v_1 = 2\,\mathrm{m/s}$. Sapendo che il corpo è soggetto ad una accelerazione costante $a = 3\,\mathrm{m/s^2}$, calcolare accelerazione e velocità all'istante $t_2 = 6\,s$.

3. Maratoneta percorre 42 km e 195 m in 2 ore e 8 min (Roma 13/3/05): calcolare velocità media in km/h e in m/s (non usare 'fattori di conversione', ma usare semplicemente $v = \Delta s/\Delta t$, con Δs e Δt nelle varie unità).

4. Nuotatore fa 8 vasche da 50 metri in 5 minuti e 40 secondi: calcolare velocità media.

5. Auto accelera da 0 a 100 km/h in 7 secondi: calcolare accelerazione media in $\mathrm{m/s^2}$.

6. Nella prima metà di un certo percorso un auto viaggia a velocità v_1, nella seconda metà a v_2. Calcolare velocità media. [Nota: Applicare la formula ad un percorso di 100 km nei seguenti due casi: I) $v_1 = 100\,\mathrm{m/s}$, $v_2 = 50\,\mathrm{m/s}$; II) $v_1 = 100\,\mathrm{m/s}$, $v_2 = 1\,\mathrm{m/s}$. Calcolare anche il tempo di percorrenza di ciascuna metà del percorso e riflettere attentamente alla consistenza di formule e risultati ottenuti.]

7. Auto viaggia la prima metà del tempo totale di percorrenza a velocità v_1 e la seconda metà a v_2. Calcolare velocità media. (Es. $v_1 = 100\,\mathrm{m/s}$, $v_2 = 50$).
   In cosa differeisce questo problema dal problema precedente?

8. Velocità della Terra intorno al Sole, assumendo orbita circolare: *cercarsi* i dati che servono: distanza Terra-Sole e periodo di rivoluzione.

9. Velocità intono all'asse di rotazione terrestre di I) persona all'equatore; II) persona a Roma (42^o latitudine).

10. Oggetto, inizialmente fermo, cade da una torre. Posizione in funzione del tempo (sistema di riferimento diretto verso il basso): $s(t = 0\,\mathrm{s}) = 0$; $s(t = 0.5\,\mathrm{s}) = 1.225\,\mathrm{m}$; $s(t = 1\,\mathrm{s}) = 4.9\,\mathrm{m}$; $s(t = 2\,\mathrm{s}) = 19.6\,\mathrm{m}$.

    I) Calcolare la velocità media nei tre tratti (da 0 a $0.5\,\mathrm{s}$, etc.).

    II) Assumendo che la velocità vari *linearmente* con il tempo, calcolare la velocità per $t = 0.5\,\mathrm{s}$, $t = 1\,\mathrm{s}$ e $t = 2\,\mathrm{s}$.

    III) Calcolare l'accelerazione media nei tre tratti (da 0 a $0.5\,\mathrm{s}$, etc.).

11. Due treni partono alla stessa ora in 'direzioni opposte' da due località agli estremi di una linea ferroviaria (ad es. Roma-Milano) di lunghezza d. Sapendo che le velocità valgono in modulo $v1$ e v_2, trovare l'espressione di tempo e posizione di incontro. Aiutarsi con un grafico orario del problema. [Fare esempio numerico con $d = 600\,\mathrm{km}$, $v_1 = 120\,\mathrm{km/h}$ e $v_1 = 80\,\mathrm{km/h}$.]

12. Un camion imbocca l'autostrada per raggiunngere una località distante 200 km e viaggia regolarmente a 70 km/h. Dopo 20 minuti una macchina imbocca lo stesso tratto di autostrada per raggiungere la stessa destinazione, viaggiando però a 130 km/h. Quale autoveicolo arriverà prima? A quale velocità dovrebbe viaggiare la macchina in modo tale che arrivino allo stesso tempo? [Si raccomanda di visualizzare graficamente il problema.]

13. Un hard disk da 2.5″ ruota alla velocità di 7200 rpm. calcolare la velocità angolare di rotazione e la velocità di rotazione di un punto situato sulla circonferenza del disco.

14. Un punto materiale si muove lungo l'asse x con la seconda legge oraria:

$$x(t) = \frac{1}{2}\, a\, t^2 + v_0\, t + x_0$$

con $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$, $v_0 = -1\,\mathrm{m/s}$ e $x_0 = 5\,m$. Calcolare la velocità media fra $t = 1\,\mathrm{s}$ e $t = 2\,\mathrm{s}$, fra $t = 1\,\mathrm{s}$ e $t = 1.5\,\mathrm{s}$, fra $t = 1\,\mathrm{s}$ e $t = 1.1\,\mathrm{s}$, fra $t = 1\,\mathrm{s}$ e $t = 1.001\,\mathrm{s}$. Preferibilmente scrivere l'equazione oraria coma una *function* in qualche linguaggio di programmazione, graficare la legge oraria e ripetere l'esercizio calcolando la velocità media in altri intervalli usando lo stesso criterio (ad es. fra 5 e 6 secondi, fra 5 e 5.5 secondi, etc).

15. Usando l'equazione oraria del problema precedente: determinare la velocità media v_1 fra 1.99 e 2.01 secondi e v_2 fra 2.09 e 2.11 secondi. Calcolare l'accelerazione media fra 2 e 2.1 secondi. La si confronti con il parametro a dell'equazione oraria.

16. Sempre sull'equazione oraria dei due problemi precedenti. Chi lo ha risolto scrivendosi una function, può infittire i 'tempi di traguardo', vedere se velocità medie e accelerazioni medie sono stabili e farsi un concetto di velocità e accelerazione istantanea.

3 Lunedi 6/3, 15:00–17:00

3.1

Dalle equazioni parametriche all'equazione della traiettoria

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad y(x)\,. \tag{25}$$

Si effettua 'eliminando' t fra le due equazioni. Non sempre è possibile farlo per tutti i possibili valori di t. Comunque, nello scrivere $y(t)$ si perde l'informazione cinematica della velocità (si immagini alla differenza fra vedere un aereo e vederne soltanto la scia dopo che è passato).

3.2

Su moto circolare uniforme: conoscendo ω (o T), calcolare il numero di giri compiuti nell'unità di tempo, ovvero la *frequenza di rotazione* ν (o f). Ogni giro corrispondono a 2π radianti. Quindi, se il punto si muove sulla cerconferenza compiendo 1 giro al secondo, la sua velocità angolare è pari a 2π radianti/s; se compie ν giri al secondo, la sua velocità angolare sarà $\nu\, 2\pi$ radianti al secondo, quindi:

$$\omega \;=\; 2\,\pi\,\nu \tag{26}$$

e, ovviamente $\nu = \omega/2\pi$. [A proposito, si **sconsiglia tentare di memorizzare tutte le 'formule inverse'**: il risultato è che poi non si ricorda quando 2π sta 'sopra' o 'sotto'. Meglio ricordarsi una sola formula, in questo caso $\omega = 2\,\pi\,\nu$, ed anche il ragionamento con il quale ci si è arrivati.]

Da $\omega = 2\,\pi\,\nu$, e ricordando che $\omega\, T = 2\pi$ otteniamo

$$\nu \;=\; \frac{1}{T}\,. \tag{27}$$

[Per ricordarsi: se il periodo è 1 s, il corpo fa 1 giro al secondo; se il periodo è 1/2 s il corpo fa 2 giri al secondo; etc.]

Un'unità di misura di frequenza è l'Hertz (Hz), che corrisponde a 1 giro al secondo (detto anche 'ciclo al secondo'). Si incontra anche 'giri al minuto' (o 'rpm', revolutions per minute), come ad esempio nei contagiri di auto e moto, e nelle velocità di rotazione di hard disk o dei vecchi dischi in vinile ('33 giri' e '45 giri').

Nota sulle dimensioni di angolo, velocità angolare e frequenza

- L'angolo, espresso come rapporto fra arco e raggio, grandezze *omogenee* (entrambe delle lunghezze), è *adimensionale*, ovvero un *numero puro*. Quindi si potrebbe dire $\alpha = 1.23$, $\alpha = 0.25$, etc., e basta. Aggiungere 'rad' serve a ricordare che si tratta di un angolo e che non è espresso in gradi nonagesimale.

- Di conseguenza, la velocità angolare, expressa in radianti al secondo, ha dimensioni fisiche inverse del tempo, ovvero s^{-1}. Ovviamente, si può scrivere $\omega = 3\,\mathrm{rad/s}$, invece che semplicemente $\omega = 3\,\mathrm{s}^{-1}$, ma conviene togliere 'rad' quando ω viene usata in formule successive. Ad esempio, in un moto circolare su $R = 2\,\mathrm{m}$, la velocità vale $v = \omega\, R = (3\,\mathrm{s}^{-1}) \times (2\,\mathrm{m}) = 6\,\mathrm{m/s}$. [Inserendo $\omega = 3\,\mathrm{rad/s}$ e dimendicando che 'rad' è solo un 'promemoria', si sarebbe ottenuta una velocità espressa nella buffa unità 'rad·m/s'.]

- Similmente per la frequenza, l'unità è s^{-1}, ed aggiungere 'giro' o 'ciclo' è pleonastico.

3.3

Δs come somma di tanti $\Delta s_i = v_i \Delta t_i$ e, analogalmente Δv come somma di tanti $\Delta v_i = a_i \Delta t_i$:

$$\Delta s = \sum_i \Delta s_i = v_i \Delta t_i \tag{28}$$

$$\Delta v = \sum \Delta v_i = a_i \Delta t_i \tag{29}$$

Soluzione numerica con pseudocodice (vedi programmi su sito del corso).
Interpretazione di Δs e di Δv come aree (caso generale).

- *Incremento* di velocità fra t_1 a t_2 come 'area' sotto la curva $a(t)$ fra $t = t_1$ e $t = t_2$. (Attenzione al segno: l'area sopra l'asse delle ascisse è positiva, quella sotto è negativa).

- *incremento* di posizione fra t_1 a t_2 come 'area' sotto la curva $v(t)$ fra $t = t_1$ e $t = t_2$.

Più in dettaglio (per Δs; i ragionamenti sono estendibili per analogia a Δv):

- Se v **costante** gli incrementi di s per ogni Δt_i sono dati da $\Delta s_i = v\,\Delta t_i$. L'incremento totale da t_1 a t_2 è pari a

$$\Delta s = \sum_i \Delta s_i = \sum_i v\,\Delta t_i\,, \tag{30}$$

ove la sommatoria è (implicitamente) estesa a tutti gli intervallini contigui compresi fra t_1 e t_2 (ovvero $\Delta t = t_2 - t_1 = \sum_i \Delta t_i$). Ovviamente in questo caso vale, banalmente:

$$\Delta s = v \sum_i \Delta t_i = v\,(t_2 - t_1)\,. \tag{31}$$

- Se v **varia con il tempo**, la (30) può essere sostituita da

$$\Delta s = \sum_i v_{m_i}\,\Delta t_i\,, \tag{32}$$

ove v_{m_i} è la velocità media in ciascun intervallino Δt_i. Ma la valutazione di v_{m_i} non è affatto banale se $v(t)$ varia in modo complicato.

- Un *sottocaso 'trattabile'* è quando $v(t)$ varia linearmente con il tempo. In questo caso v_{m_i} corrisponde al valore di $v(t)$ al centro dell'intervallino Δt_i, che indichiamo con $v(t_i + \Delta T_i)$:

$$\Delta s \;=\; \sum_i v_i\, \Delta t_i\,. \tag{33}$$

[Questa formula è valida anche per un solo intervallo Δt, riottenendo così la (31)].

- Il *caso generale* è invece quando la sommatoria è estesa ad un grandissimo numero di intervallini, che di conseguenza diventano molto piccoli (al limite, tendono a zero). Infatti, quando il '*campionamento*' del tempo è molto elevato, la differenza fra $v(t)$ e $v(t + \Delta t)$ è molto piccola e quindi: $v(t)$ varia linearmente in tale intervallino; ovvero il valore centrale v_i [ovvero $v(t+\Delta t/2)$] coincide con il valore medio [ovvero $(v(t) + v(t + \Delta t/2))/2$]. Possiamo allora scrivere l'incremento di posizione su un intervallo di tempo 'macroscopico' $\Delta t = t_2 - t_1$ come

$$\Delta s \;=\; \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_i \Delta s_i = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i v_i\, \Delta t_i\,. \tag{34}$$

È facile vedere come $\lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i v_i\, \Delta t_i$ è pari all'*area* "sotto la curva $v(t)$" (con la solita convenzione dei segni vista precedentemente).

- Riassumiamo il **caso generale**, al quale sono riconducibili i due casi particolari di velocità costante e di moto uniformemente accelerato:

$$\Delta s|_{t_1}^{t_2} \;=\; \mathcal{A}[v(t)]_{t_1}^{t_2} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i v_i\, \Delta t_i \equiv \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, \mathrm{d}t \tag{35}$$

$$\Delta v|_{t_1}^{t_2} \;=\; \mathcal{A}[a(t)]_{t_1}^{t_2} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i a_i\, \Delta t_i \equiv \int_{t_1}^{t_2} a(t)\, \mathrm{d}t\,, \tag{36}$$

ove

- indichiamo con $\mathcal{A}\,[f(t)]_{t_1}^{t_2}$ l'area sotto la generica funzione $f(t)$ fra t_1 e t_2 (nota: $\mathcal{A}\,[f(t)]_{t_1}^{t_2}$ non è un simbolo 'ufficiale');
- '$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, \mathrm{d}t$' sta ad indicare il limite '$\lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i f_i\, \Delta t_i$', con questa interpretazione dei simboli:

* '$\int$' sta per una 'S' stilizzata, a ricordare che si tratta di una 'somma';
* $\mathrm{d}t$ rappresenta l'intervallino 'infinitesimo' di Δt;
* t_1 e t_2 sono i limiti della 'somma'.

'$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$' è chiamato '*integrale* di $f(t)$ in $\mathrm{d}t$ da t_1 a t_2' e le tecniche del suo calcolo saranno apprese nel corso di 'calcolo integrale' (ma ciò non deve spaventare: l'importante, per ora, è averne capito il concetto).

Dal **punto di vista computazionale** è importante capire che in pratica

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i f_i\,\Delta t_i \quad \approx \quad \lim_{\Delta t_i \;\to\; \text{`}\Delta t_i \; \textit{molto piccolo}\text{'}} \; \sum_i f_i\,\Delta t_i \tag{37}$$

con la quale è possibile risolvere i problemi in modo *numerico* (e con eccellette grado di approssimazione) quando la soluzione esatta mediante l'integrale è difficile o addirittura impossibile (vedi esempi di programmi sul sito del corso).

3.4

Moto uniformemente accelerato: formule ricavate con metodo grafico dalle aree sotto $a(t)$ e $v(t)$. Chiamiamo s_0 e v_0 posizione e velocità iniziale, sia $a(t)$ costante semplicemente a e consideriamo velocità e posizione al tempo t.

$$\Delta v = \mathcal{A}\,[a(t)]_0^t = a\,t \qquad \text{[rettangolo]} \tag{38}$$

$$\rightarrow \quad v(t) = v_0 + a\,t \tag{39}$$

$$\Delta s = \mathcal{A}\,[v(t)]_0^t = \frac{[v_0 + v(t)]\,t}{2} \qquad \text{[trapezio]} \tag{40}$$

$$= \frac{(v_0 + v0 + a\,t)\,t}{2} = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 \tag{41}$$

$$\rightarrow \quad s(t) = s_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2\,. \tag{42}$$

[Si noti come questa formula, valida per la generica coordinata unidimensionale si applica ad $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ e anche per $\alpha(t)$. In particolare, per quest'ultima si avrà

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega\,t + \frac{1}{2}\,\dot{\omega}\,t^2\,, \tag{43}$$

ove è stata indicata con $\dot{\omega}$ l'accelerazione angolare, ovviamente assunta costante.]

3.4.1

Di nuovo moto uniformemente accelerato — soluzione algebrica mediante velocità medie (**si lascia come esercizio**).

$$\begin{aligned} \Delta v &= a\,t \qquad (\text{con } t_0 = 0) && (44)\\ v(t) - v_0 &= a\,t && (45)\\ [\,v_0 = v(t_0) = v(0)\,] & && \\ \rightarrow \quad v(t) &= v_0 + a\,t && (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_m\big|_0^t &= \frac{v_0 + v(t)}{2} = \frac{2\,v_0 + a\,t}{2} = v_0 + \frac{a}{2}\,t && (47)\\ \Delta s &= v_m\big|_0^t\, t = \left[v_0 + \frac{a}{2}\,t\right]\, t = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 && (48)\\ s(t) - s_0 &= \Delta s && (49)\\ \rightarrow \quad s(t) &= s_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 && (50) \end{aligned}$$

[per il generico t_0:

$$s(t) = s(t_0) + v_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\,a\,(t - t_0)^2 \;] \qquad (51)$$

Velocità varia linearmente con il tempo; posizione varia quadraticamente. $v(t)$ è una retta; $s(t)$ è una parabola (nel piano $\{t, s\}$! nello spazio è un tratto rettilineo.) Caso particolare, con $s_0 = 0$ e $v_0 = 0$:

$$\begin{aligned} v(t) &= a\,t && (52)\\ s(t) &= \frac{1}{2}\,a\,t^2\,. && (53) \end{aligned}$$

Accelerazione di gravità $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$: tutti i corpi nello stesso punto sulla superficie terrestre, nel vuoto e non soggetti ad 'altre forze', cadono con la stessa accelerazione. Nei problemi l'accelerazione di gravità può essere indicata con $a = g$ o $a = -g$ a seconda del verso scelto per l'asse verticale, ma per g si intende sempre $9.8\,\mathrm{m/s^2}$.

3.5

Problemini tipici che si risolvono con questo schema:

1. Corpo cade da una torre di altezza h (trascurando resistenza dell'aria)
   - A che velocità arriva al suolo?
   - Quanto tempo ci mette?
2. Problema del sasso nel pozzo. Tempo intercorso fra quando si lascia cadere il sasso a quando si *vede* lo 'splash': quanto è profondo il pozzo? E se invece di vedere lo 'splash', si ode il tonfo? (Ovvero quanto varia la valutazione di profondità se si tiene conto della velocità finita del suono). Fare esempio numerico con $t = 3\,s$ e $v_s = 300\,\mathrm{m/s}$.
3. Corpo lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_0:
   - A che altezza arriva?
   - Quanto tempo ci mette?
   - A che altezza ritorna alla posizione di partenza?
   - Quanto ci mette a a tornare?
   - Grafico $z(t)$.
   - Come varia la velocità (con segno) da quando l'oggetto parte verso l'alto a quando torna nella posizione iniziale? ($\rightarrow$ grafico.)
   - Grafico di $a(t)$.
4. I problemi di accelerazione e frenata di veicoli sono assolutamente analoghi:
   - Quanto tempo impiega per arrestarsi una macchina che è frenata con accelerazione a (per es $a = -2\,\mathrm{m/s^2}$) se all'inizio della frenata viaggiava a v_0 (per es. $100\,\mathrm{k/h}$)?
   - Quanto vale lo spazio di arresto? [$\rightarrow d = d(v_0, a)$].
5. Moto bidimensionale, in cui $v_x(t)$ è costante e $v_y(t)$ varia linearmente con t. Equazione della traiettoria $y(x)$. Problema del cannoncino: angolo di $\rightarrow$ gittata massima.

3.6

Velocità e accelerazione istantanea: velocità e accelerazione nel linguaggio del calcolo differenziale.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t)}{(t + \Delta t) - t} = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_t = x'(t) \equiv \dot{x}(t) \equiv \mathrm{D}(x(t)) \tag{54}$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_1 + \Delta t) - v(t)}{(t + \Delta t) - t} = \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_t \equiv v'(t) \equiv \dot{v}(t) \equiv \mathrm{D}(v(t)) \,, \tag{55}$$

ove abbiamo scritto la derivata in vari modi.

(Nota: in fisica la variabile indipendente più usuale è t (tempo) e non la generica x della matematica.)

3.7

Accelerazione e forze: Le accelerazioni sono dovute a forze, secondo la famosa Seconda Legge di Newton, che in una sola dimensione è semplicemente

$$F = m\,a \,, \tag{56}$$

da imparare a leggere (e ad usare) come

$$a = \frac{F}{m} \,. \tag{57}$$

Il coefficiente di proporzionalità fra accelerazione e forza è $1/m$. Maggiore è la *massa*, maggiore è l'*inerzia del corpo*, ovvero la sua 'riluttanza' a cambiare velocità. Per questo motivo m è anche chiamata *massa inerziale*. I problemi tipici che incontreremo sono quelli in cui si ha interesse a dedurre la cinematica dei corpi a partire dalle forze in gioco. F sta per *forza totale* che agisce sul corpo ('punto materiale') di massa m, ovverossia la 'risultante delle forze'. Nel caso unidimensionale la forza totale è semplicemente la somma algebrica delle varie forze. Vedremo in seguito 1) come trovare la risultante delle forze quando queste agiscono su uno stesso punto ma non sono allineate; 2) cosa succede quando diverse forze agiscono sullo stesso stesso corpo esteso 'rigido' e non sono allineate.

Grandezza		Dimensione		Unità di base SI	
Nome	Simbolo	a)	b)	Nome	Simbolo
lunghezza	l	dim l	L	metro	m
massa	m	dim m	M	chilogrammo	kg
tempo	t	dim t	T	secondo	s
corrente elettrica	I	dim I	I	ampere	A
temp. termodinamica	T	dim T	Θ	kelvin	K
quantità di materia	n	dim n	N	mole	mol
intensità luminosa	I_v	dim I_v	J	candela	cd

Tabella 1: Grandezze di base del Sistema Internazionale.

3.7.1

Il caso di $F = 0$ dà $a = 0$, ovvero $v =$ cost: velocità costante (zero è un caso particolare): $\Rightarrow$ 'prima legge di Newton', ovverossia 'principio di inerzia' (Galileo).

3.7.2

Dimensioni e unità di misura della forze. Dalla (56) si vede come una forza è dimensionalmente una massa per un'accelerazione, ovvero massa $\times$ lunghezza $\times$ spazio^{-2}:

$$\mathrm{dim}F \;=\; \mathsf{M\,L\,T}^2\,, \tag{58}$$

ovvero

$$\mathrm{dim}F \;=\; \mathrm{dim}(m\,l\,t^{-2})\,. \tag{59}$$

o anche

$$[\,F\,] \;=\; m\,l\,t^{-2}\,. \tag{60}$$

Se la massa è misurata in chilogrammi, la lunghezza in metri e il tempo in secondi (*unità di base* del SI, 'sistema internazionale', vedi tabella 1), la forza sarà data in $\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$, ovvero in newton (N) (vedi tabella 2).

Nota: affinché le (56) e (57) non siano delle tautologia è necessario che almeno in principio ed in alcuni casi pratici la forza sia misurabile indipendentemente da massa e accelerazione mediante opportuni *dinamomentri*. Ovviamente questo non è sempre fattibile (si immagini la forza Terra-Sole). In questo caso la forza è ricavata da accelerazione e masse (come facciamo a conoscere le masse? Vediamo prima l'espressione della forza gravitazionale poi torniamo sul problema).

Grandezza	Dimensioni	Unità derivate SI	
		Nome	Simbolo (Relazione)
angolo piano	—	radiante	rad ($1\,\mathrm{rad} = 1\,\mathrm{m/m}$)
angolo solido	—	steradiante	sr ($1\,\mathrm{sr} = 1\,\mathrm{m^2/m^2}$)
frequenza	T^{-1}	hertz	Hz ($1\,\mathrm{Hz} = 1\,\mathrm{s^{-1}}$)
attività	T^{-1}	becquerel	Bq ($1\,\mathrm{Bq} = 1\,\mathrm{s^{-1}}$)
forza	$\mathsf{M\,L\,T}^{-2}$	newton	N ($1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg \cdot m/s^2}$)
pressione	MŁ$^{-1}\mathsf{T}^{-2}$	pascal	Pa ($1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m^2}$)
energia	$\mathsf{M\,L^2\,T}^{-2}$	joule	J ($1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N \cdot m}$) $= 1\,\mathrm{W \cdot s}$
potenza	$\mathsf{M\,L^2\,T}^{-3}$	watt	W ($1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J/s}$)
dose equivalente	$\mathsf{L^2\,T}^{-2}$	sievert	Sv ($1\,\mathrm{Sv} = 1\,\mathrm{J/kg}$)
dose in energia	$\mathsf{L^2\,T}^{-2}$	gray	Gy ($1\,\mathrm{Gy} = 1\,\mathrm{J/kg}$)
carica elettrica	$\mathsf{T\,I}$	coulomb	C ($1\,\mathrm{Gy} = 1\,\mathrm{A \cdot s}$)
differenza di potenziale	$\mathsf{M\,L^2\,T^{-3}\ I^{-1}}$	volt	V ($1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{J/C}$)
capacità elettrica	$\mathsf{M\,L^2\,T^{-4}\ I^{-2}}$	farad	F ($1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{V/C}$)
resistenza elettrica	$\mathsf{M\,L^2\,T^{-3}\ I^{-2}}$	ohm	Ω $1\,\Omega = 1\,\mathrm{V/A}$)
conduttività	$\mathsf{M^{-1}L^{-2}\,T^3\ I^2}$	siemens	S ($1\,\mathrm{S} = 1\,\Omega^{-1}$)
flusso magnetico	$\mathsf{M\,L^2\,T^{-2}\ I^{-1}}$	weber	Wb ($1\,\mathrm{Wb} = 1\,\mathrm{V \cdot s}$)
densità di flusso magnetico	$\mathsf{M\,T^{-2}\ I^{-1}}$	Tesla	T ($1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{Wb/m^2}$)
induttanza	$\mathsf{M\,L^2\,T^{-2}\ I^{-2}}$	henry	H ($1\,\mathrm{H} = 1\,\mathrm{Wb/A}$)
temper. Celsius	Θ	grado Celsius	°C ($1\,°\mathrm{C} = 1\,\mathrm{K}$)
flusso luminoso	J	lumen	lm ($1\,\mathrm{lm} = 1\,\mathrm{cd \cdot sr}$)
illuminazione	$\mathsf{L^{-2}J}$	lux	lx ($1\,\mathrm{lx} = 1\,\mathrm{lm/m^2}$)

Tabella 2: Grandezze derivate del Sistema Internazionale con nomi propri.

3.8

Esempi di forze:

1. *Forza gravitazionale* (di Newton) fra due corpi:

$$F \;=\; -G\,\frac{m_1\,m_2}{d^2} \qquad (61)$$

   con m_1 e m_2 la massa (gravitazionale) dei due corpi, d la loro distanza (fra i loro 'centri' se si tratta di corpi estesi — un concetto che sarà chiarito nel seguito) e G una costante opportuna (*costante gravitazionale*) tale che se le masse sono espresse in kg e la distanza in m, la forza risultante sarà in Newton (N): $G = 6.67300 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}} = 6.67300 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}$. Il segno negativo sta ad indicare che la forza è *attrattiva.*
   Nota: abbiamo incontrato la 'massa', nella seconda legge di Newton, con il significato di inerzia. Ora la incontriamo con il significato di 'carica gravitazionale', in analogia alle cariche elettriche. Quindi, queste due 'masse' fanno riferimento, in linea di princio, a due concetti diversi: *massa inerziale* e *massa gravitazionale.* Sperimentalmente massa inerziale e gravitazionale sono proporzionali e quindi scriviamo semplicemente m anche nella (61), inglobando il fattore di proporzionalità nella costante fravitazionale G.

2. *Forza gravitazionale* di un corpo sulla terra

$$F \;=\; -m\,g\,, \qquad (62)$$

   con $g \approx 0.980\,\mathrm{m/s^2}$ (varia fra $g \approx 0.973\,\mathrm{m/s^2}$, all'equatore, a $g \approx 0.983\,\mathrm{m/s^2}$, ai poli). Se assumiamo, come vedremo essere vero, che che la forza fra un corpo sulla superficie della Terra e la Terra stessa sia uguale a quella fra due corpi a distanza R_T (raggio terrestre), ovvero *come se* la massa della terra fosse concentrata al suo centro, otteniamo

$$F \;=\; -G\,\frac{m\,M_T}{R_T^2} = -m\,g\,, \qquad (63)$$

$$\rightarrow\quad g \;=\; G\,\frac{M_T}{R_T^2}\,, \qquad (64)$$

   con[1] $R_T = 6\,371\,\mathrm{km}$ e $M_T = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$

[1]Essendo la terra schiacciata ai poli, il 'raggio' non è ben definito. Il valore 6 371 km è 'una sorta' di valore medio, più precisamente è il raggio di una sfera di volume pari a quello della

3. *Forza elettrostatica* (di Coulomb) fra due corpi carichi:

$$F = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{d^2} \tag{65}$$

ove Q_1 e Q_2 sono le cariche espresse in Coulomb (C), d come sopra e k_0, altra costante, di valore $k_0 = 9 \times 10^9 \,\mathrm{N\,m^2/C^2}$.
Si noti come questa forza può essere repulsiva o attrattiva a seconda del segno relativo delle cariche.

4. *Forza elastica* (di una molla)

$$F = -k\,x\,, \tag{66}$$

ove x è preso dalla posizione di equilibrio (a volte si incontra Δx invece di x, ad indicare che si tratta di una differenza rispetto a x_0 di equilibrio) e k è una costante, dipendente dalla molla, di unità N/m.
La forza è negativa se x è positivo, positiva se x è negativo, in quanto è una *forza di richiamo* verso la posizione di equilibrio $x = 0$.

5. *Forza di attrito dinamico* indipendente dalla velocità su oggetto che scivola su piano scabro (ovvero con attrito):

$$F = -\mu_d\,F_N\,\hat{v}\,, \tag{67}$$

ove F_N è la forza normale alla superficie μ_d è il *coefficiente di attrito dinamico*, e $\hat{v}$ indica direzione e verso della velocità ($\hat{v}$ è tecnicamente un *versore*).
Il segno meno indica che questa forza è sempre opposta alla velocità e quindi sempre frenante.
Nel caso di piano orizzontale e la sola forza che l'oggetto esercita sulla superficie è la forza peso si ha

$$F = -\mu_d\,m\,g\,\hat{v}\,. \tag{68}$$

Per quanto riguarda *attrito statico*, vedi punto 7.

Terra. Il raggio equatoriale (ovvero raggio dell'equatore e anche distanza superficie-centro Terra all'equatore) vale 6 378 km. Il raggio polare (più precisamente la distanza polo-centro) à pari a 6 356 km. Comunque, per quello che ci riguarda per gli esercizi, $R_T = 6.37 \times 10^6$ m va più che bene.

6. *Forza di viscosità* dipendente linearmente dalla velocità:

$$F \quad = \quad -\beta\, v\,, \tag{69}$$

ove β è un opportuno coefficiente e v la velocità.
Questa forza è sempre frenante.

7. *Forza di reazione vincolare*: ??. Se ne evince la presenza dalla cinematica e dalle altre forze, ma ha valore incognito (il suo valore è una delle incognite del problema → esempi: forza di *attrito statico*; *reazione vincolare* di tavoli, guide e piani inclinati, *tensioni di corde*).

Conoscendo la formula della forza si può determinare l'accelerazione da $a = F/m$ (se questa è la sola forza agente):

1. *forza gravitazionale*: $a_1 = -G\, m_2/d^2, \quad a_2 = -G\, m_1/d^2$;
2. *forza gravitazionale sulla superficie terrestre*: $a = -(m\, g)/m = b$.
3. *forza elettrostatica*: $a_i = (1/m_i)\, k_0\, Q_1\, Q_2\, /d^2$;
4. *forza elastica*: $a = -(k/m)\, x$;
5. *forza di attrito dinamico* $a = -\mu_d\, g$;
6. *forza di viscosità* $a = -(\beta/m)\, v$;

(Si faccia attenzione ai diversi significati del generico simbolo di costante k.)

3.9

Problemini

1. Conoscendo g sulla Terra, pari a $9.8\,\mathrm{m/s^2}$, calcolare l'accelerazione di gravità g' (dovuta al solo campo gravitazionale terrestre) di un corpo distante 400000 km dalla Terra
2. Due cariche uguali, distanti 1 m, si respingono con una forza di 1 N. Quanto vale la loro carica?
3. Un corpo di 1 kg che viaggia orizzontalmente a una velocità di 2 m/s, arriva su una superficie orizzontale che presenta attrito. Il corpo si ferma in un metro. Calcolare il coefficiente di attrito dinamico.

4. Approssimiamo la forza di resistenza dell'aria che frena la caduta di un paracadutista ad una forza di viscosità di $\beta = 98\,\mathrm{kg/s}$. Sapendo che il paracadutista (con equipaggio) pesa 100 kg, trovare la velocità limite di caduta.

5. Un corpo di massa $m = 10\,\mathrm{kg}$ è appeso ad una corda. Calcolare la tensione della corda (ovvero la forza con la quale si sorregge il corpo) quando:

   I) il corpo è fermo;

   II) il corpo cade con accelerazione $9.8\,\mathrm{m/s^2}$;

   III) il corpo sale con accelerazione di $9.8\,\mathrm{m/s^2}$.

4 Giovedi 9/3, 18:00–19:00

Esercitazioni.

5 Venerdi 10/3, 14:00–16:00

Esercitazioni.

6 Lunedi 13/3, 15:00–16:00

Esercitazioni.

7 Giovedi 16/3, 18:00–19:00

7.1

Lancio di oggetto verso l'alto (trascurando attrito dell'aria):

- Analisi forse in gioco (dal momento in cui è in 'volo libero' a quando viene ripreso). $F = -m\,g \rightarrow a = F/m = -g$.

- Ancora sul significato delle (35) e (36).

- Soluzione numerica (per file con codice, vedi sito del corso):

```
/**********************************************************/
#include <stdio.h>
main()
{
  float v0, v, vm, a, z0, z, dt, t;

  a  = -9.8;  /* accelerazione in m/s^2    */
  v0 = 30;    /* velocita' iniziale in m/s */
  z0 = 0;     /* posizione iniziale in m   */
  dt = 0.1;   /* intervallo di tempo in s  */

  v  = v0;
  z  = z0;
  t  = 0;
  printf(" t (s):  %f;    z (m): %f;    v (m/s): %f\n", t, z, v);
  while (z >= 0)
  {
    vm = v + a * dt/2;  /* velocita' media = (v + (v+a*dt))/2     */
    v  += a * dt;       /* velocita' dopo intervallo dt           */
    z  += vm * dt;      /* posizione dopo intervallo dt in cui    */
                        /* il corpo si e' mosso con  v media vm   */
    t  += dt;           /* tempo dopo intervallo dt               */
    printf(" t (s):  %f;    z (m): %f;    v (m/s): %f\n", t, z, v);
  }
}
/***********************************************************
Per compilare ed eseguire (sotto Unix/Linux):
>gcc -o lancio lancio.c
>./lancio

Modifiche suggerite:
- cambiare i parametri
- nel 'while' provare a mettere
  - un limite su t per studiare il moto fino ad un certo tempo
  - un diverso limite in z (es. "z >= -50") per
- limitare le stampe (soprattutto quando "dt -> 0")
- grafica, o mediate opportune API, es. gnuplot, oppure
  scrivendo i valori su file e rileggendoli da programma
```

```
  interattivo
**********************************************************/
```

- Soluzione grafica: di nuovo sul significato della 'pendenza delle curve $s(t)$ e $v(t)$.

7.2

Reazioni vincolari: valutazione delle forze dal bilancio delle forze note e da considerazioni cinematiche → "le forze che mancano per far tornare $F = m\,a$": esempio di peso poggiato su un tavolo.

7.3

Pesare la Terra. Torniamo al problema di come come ricavarsi la massa della Terra e del Sole. Procediamo per ordine, a partire da una massa campione in principio arbitraria (come in qualche modo è il chilogrammo):

- si determinano i valori di due masse m_1 e m_2 mediante operazioni di confronto (bilance a piatti);
- mediante dinamometro si determina la forza $F_{1,2}$ di attrazione gravitazionale fra m_1 e m_2 poste alla distanza $d_{1,2}$ e, invertendo la (61), si ricava G:

$$G = \frac{F_{1,2} \cdot d_{1,2}}{m_1 \cdot m_2}; \tag{70}$$

- mediante altro dinamometro (bilancia a molla, tipo bilancia pesa persone) si determina la forza peso fra un'altra massa e la Terra, ricavando così dalla (61) la massa della Terra (in effetti, Cavendish, che per primo nel 1798 effettuò l'esperimento sopra descritto e ricavò G, disse giustamente di essere stato il primo ad aver "pesato la Terra"!);
- a questo punto, dall'accelerazione della Luna verso la Terra e dall'accelerazione della Terra verso il Sole è possibile ricavarsi la massa della Luna e del Sole.

7.4

Cosa si intende per *accelerazione in un moto circolare*? Abbiamo già visto velocità e accelerazione angolare, che riscriviamo, in forma differenziale:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} \tag{71}$$

$$\dot{\omega} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}\,. \tag{72}$$

Ma un punto materiale che si muove in moto circolare uniforme non ha accelerazione angolare, per definizione. Ha accelerazione o no? Riscriviamo le equazioni orarie del moto e ricaviamoci velocità e accelerazione:

$$x(t) = R\,\cos[\theta(t)] = R\,\cos(\omega\,t) \tag{73}$$

$$y(t) = R\,\sin[\theta(t)] = R\,\sin(\omega\,t) \tag{74}$$

(avendo scelto $t = 0$, ripetiamo, quando la particella si trova in $x = R$ e $y = 0$, ovvero $\theta(t = 0) = 0$).
Velocità delle proiezioni:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,R\,\cos(\omega\,t) = -R\,\omega\,\sin(\omega\,t) \tag{75}$$

$$v_y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,R\,\sin(\omega\,t) = R\,\omega\,\cos(\omega\,t) \tag{76}$$

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,v_x(t)\left[= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,x(t)\right] = -R\,\omega^2\,\cos(\omega\,t) \tag{77}$$

$$a_y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,v_y(t)\left[= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,y(t)\right] = -R\,\omega^2\,\sin(\omega\,t) \tag{78}$$

8 Venerdi 17/3, 14:00–16:00

8.1

Seguito da lezione precedente: Confrontando le equazioni (77)-(78) con le (73)-(73):

$$a_x(t) = -\omega^2 x(t) \tag{79}$$

$$a_y(t) = -\omega^2 y(t)\,. \tag{80}$$

Concentriamoci all'istante $t = 0$, che abbiamo scelto convenzionalmente al passaggio del punto materiale per $x = R$ e $y = 0$, ovvero per $\theta = 0$:

- $v_x(0) = 0$, e $v_y(0) = \omega R$: la velocità è diretta verso l'alto (il verso dipende dalla scelta del verso di rotazione) e, soprattutto, essa è ortogonale al raggio che congiunge la posizione della particella con il centro del cerchio. Riconosciamo inoltre in $v_y(0)$ la velocità v lungo la circonferenza.

- $a_x(0) = -\omega^2 R$ e $a_y(0) = 0$: l'accelerazione è diretta lungo il raggio che congiunge la posizione della particella con il centro del cerchio. Il segno meno indica che l'accelerazione è diretta verso il centro del cerchio.

Ma, per simmetria, queste considerazioni devono essere valide ovunque si trovi la particella lungo il cerchio[2] (basta ridefinire lo zero del tempo l'istante in cui la particella si trova in un dato punto e costruire opportunamente il sistema di riferimento). Quindi le nostre considerazioni riguardo il moto circolare uniforme sono generali:

- la velocità è sempre diretta ortogonalmente al raggio, ed è quindi tangenziale alla circonferenza (è quindi anche chiamata *velocità tangenziale*);

- esiste un'accelerazione, in modulo $\omega^2 R$ [$= v^2/R$], diretta lungo il raggio, verso il centro del cerchio: *accelerazione centripeta*;

- se c'è un'accelerazione, ci deve essere una forza, in modulo uguale a $ma = m\,\omega^2\,R$ [$= m\,v^2/R$], diretta verso il centro del cerchio: *forza centripeta*.

Se indichiamo il raggio del cerchio con una freccia verso il punto ove si trova la particella, notiamo che, con il passare del tempo questa freccia ruota.

Idem, per la velocità (si immagini la luce del faro di una moto che si muove a velocità costante lungo la traiettoria): il punto di applicazione della freccia corre lungo la circonferenza e la freccia ruota. Per caratterizzare diverse velovità, si può pensare che le frecce siano lunghe $v = \omega\,R$. Se si immagina una freccia che ha punto di applicazione nell'origine e si mantiene sempre parallela a quella lungo la circonferenza, questa freccia ruota soltanto.

Stesso vale per l'accelerazione: freccia sempre 'antiparallela' alla freccia associata al raggio.

[2] Un utile esercizio, anche come ripasso di trigonometria, consiste nel fare una tabellina di x, y, v_x, v_y, a_x e a_y per $t = T/8$, $T/4$, $T/2$, $3/4\,T$ e T, — in lezione abbiamo fatto il caso $t = T/4$.

8.2

vettori: grandezze caratterizzate da modulo, direzione e verso, e che possono essere definite dalle componenti. Le 'frecce' ruotanti di cui si parlava sopra sono, più propriamente, vettori ruotanti.

In generale:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \{x(t),\, y(t)\} && (81)\\
\vec{v}(t) &= \{v_x(t),\, v_y(t)\} && (82)\\
\vec{a}(t) &= \{a_x(t),\, a_y(t)\} && (83)\\
\vec{F}(t) &= \{F_x(t),\, F_y(t)\} && (84)
\end{aligned}$$

[Il passaggio a tre dimensioni è immediato: si aggiunge la componente z, ovvero, rispettivamente, $z(t)$, $v_z(t)$, $a_z(t)$ e $F_z(t)$.] Le relazioni che abbiamo imparato su una dimensione valgono, scritte vettorialmente, in generale e si intendono riferite a ciascuna componente:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{r}(t) \;\Rightarrow \{v_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x\,,\; v_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y\,\} && (85)\\
\vec{a}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{v}(t) \;\Rightarrow \{a_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_x\,,\; a_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_y\,\} && (86)\\
\vec{F} &= m\,\vec{a} \;\Rightarrow \{F_x = m\,a_x\,,\; F_y = m\,a_y\,\} && (87)
\end{aligned}$$

ovvero:

- l'operatore di derivata si intende applicato a ciascuna componente;
- moltiplicare un vettore per uno *scalare* (ovvero grandezze con una sola componente) vuol dire moltiplicare ciascuna componente per tale scalare.

Ovviamente, essendo l'accelerazion la derivata della velocità, a sua volta derivata della posizione, si ha

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{r}(t)\,. \qquad (88)$$

Inoltre, giocando con le derivate, si ha per la forza:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\,. \qquad (89)$$

8.2.1

Modulo del vettore: così come la lunghezza del raggio vettore $\vec{r}$ si ottiene applicando il teorema di Pitagora alle componenti,

$$r(t) = |\vec{r}(t)| \quad = \quad \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \tag{90}$$

lo stesso vale per il modulo di altri vettori:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| \quad = \quad \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} \tag{91}$$

e

$$a(t) = |\vec{a}(t)| \quad = \quad \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t)}\,. \tag{92}$$

Direzione e verso dei vettori (nel piano): dalla trigonometria, ricordando che per il generico vettore $\vec{a} = \{a_x, a_y\}$, di modulo $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, valgono:

$$\frac{a_y}{a_x} = \tan\theta \tag{93}$$

$$\frac{a_x}{a} = \cos\theta \tag{94}$$

$$\frac{a_y}{a} = \sin\theta \tag{95}$$

$$\tag{96}$$

Osservazioni su come ottenere angolo dalle componenti: funzioni scientifiche `atan()`, `acos()`, `asin()` [$\mathtt{tan}^{-1}$, $\mathtt{cos}^{-1}$, $\mathtt{sin}^{-1}$ nei calcolatorini scientifici].[3] Si presti attenzione al fatto che, mentre nei calcolatorini si può scegliere fra radianti e gradi sessagesima (e alcuni addirittura gradi centesimali!), nelle funzioni delle librerie scientifiche (o anche in quelle di default in molti linguaggi di programmazione, inclusi javascript e php, tanto per fare degli esempi) i gradi sono sempre intesi in radianti!

[3]Si noti come in questo caso il '$\mathtt{tan}^{-1}$' etc. non indica il reciproco, ovvero $1/\tan()$ etc., bensì l'*operatore inverso*, ovvero tale che $\mathtt{tan}^{-1}\,\mathtt{tan}\alpha{=}\alpha$, a meno delle solite ambiguità tipiche delle funzioni trigonometriche! Provare a calcolare $\mathtt{tan}^{-1}\,\mathtt{tan}\alpha$, con $\alpha = \pi/4$, $5/4\,\pi$, $9/4\,\pi$ e $-3/4\,\pi$.

Problemi di ambiguità. Per ottenere in modo univoco un angolo compreso fra 0 e $2\,\pi$ bisogna 'incrociare' opportunamente le informazioni per capire in quale quadrante è l'angolo. Nelle librerie scientifiche si trova spesso la funzione `atan2()` che svolge tale compito. $\rightarrow$ fare qualche esercizio!

Ricordiamo anche conversione gradi$\rightarrow$radianti: fattore tale che, quando il valore espresso in gradi vale 180, quello espresso in radianti vale π: $\rightarrow \alpha_{rad} = \alpha_{gradi} \times \pi/180$.

8.3

Estensione del concetto di accelerazione: non significa cambiare v (in modulo), ma cambiare il vettore $\vec{v}$:

$$\vec{a} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{v}\,, \tag{97}$$

che implica

$$\vec{a} = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \vec{v} = \text{costante} \;: \tag{98}$$

$$\text{accelerazione nulla} \;\;\Leftrightarrow\;\; \text{moto rettilineo uniforme}\,. \tag{99}$$

Altro modo di vederlo: c'è accelerazione se cambia almeno una delle componenti di $\vec{v}$. Quello che conta è

$$a \;=\; |\vec{a}| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,. \tag{100}$$

C'è accelerazione sia se un corpo cambia modulo della velocità che se curva (o fa entrambe le cose). In particolare, può anche succedere di avere $a \neq 0$ pur avendo $v = \text{costante}\ldots$

$\Rightarrow$ ad esempio nel *moto circolare uniforme*:

In questo caso, per i ragionamenti fatti precedentemente, è chiaro come i moduli dei vettori $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$ non dipendano dal tempo (ruotano soltanto, ma non si accorciano né si allungano), e valgano, rispettivamente, $|\vec{r}(t)| = R$, $|\vec{v}(t)| = \omega\, R$ e $|\vec{a}(t)| = \omega^2\, R$.

Agli stessi risultati si arriva usando le espressioni di $x(t)$, $y(t)$, etc. Esercizio:

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \;=\; \sqrt{R^2\,\cos^2(\omega\, t) + R^2\,\sin^2(\omega\, t)} \tag{101}$$

$$\;=\; \sqrt{R^2\,[\cos^2(\omega\, t) + \sin^2(\omega\, t)]} \tag{102}$$

$$\;=\; R \tag{103}$$

Ricavarsi, come esercizio $|\vec{v}(t)|$ e $|\vec{a}(t)|$ dalle equazioni delle componenti (il risultato deve essere, come abbiamo visto sopra, $\omega\, R$ e $\omega^2\, R$).

8.4

A cosa è dovuta la forza centripeta? Esempio della cinghia ruotante. Cosa succede quando la forza non è più applicata? Cessata la forza centripeta, se non ci sono altre forze in gioco, il corpo seguita di moto rettilineo uniforme, con la velocità che aveva al momento del rilascio: → "parte per la tangente".

Molto spesso la forze centripeta è semplicemente una *reazione vincolare*, il cui valore è ricavato dalla cinematica:

> Corpo di massa m è in rotazione con moto circolare uniforme:
> → ci deve essere una accelerazione centripeta;
> → ci deve essere una forza centripeta.

Caso particolare in cui la *forza centripeta è attribuibile ad una forza nota*:
→ Orbite circolari di satelliti:

$$\begin{aligned} \text{considerazioni cinematiche} + \text{“}F = m\,a\text{”} &\rightarrow \text{acc. centrip.} && (104)\\ &\rightarrow \text{forza. centrip.} && (105)\\ &\rightarrow F_c = -m\,\omega^2\,R && (106)\\ \text{legge di gravitazione universale} &\rightarrow F_G = -\frac{G\,M\,m}{R^2}\,. && (107) \end{aligned}$$

Ma essendo la forza di gravità l'unica forza che può essere responsabile della forza centripeta:[4]

$$F_c = F_G \qquad (108)$$

$$-m\,\omega^2\,R = -\frac{G\,M\,m}{R^2}\,. \qquad (109)$$

Ne segue:

$$\omega^2\,R = \frac{G\,M}{R^2} \qquad (110)$$

$$\frac{(2\pi)^2}{T^2} = \frac{G\,M}{R^3} \qquad (111)$$

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2}{G\,M}R^3 \qquad (112)$$

$$T^2 \propto R^3 \qquad (113)$$

(⇒ "Terza legge di Keplero", valida in generale per orbite ellittiche, previa sostituzione del raggio R con semiasse maggiore, qui dimostrata solo per caso particolare di orbite circolari.)

[4]Insistiamo sul fatto che l'espressione $F_c = F_G$ non vuol dire che "F_c è equilibrata da $-F_G$, *come se ci fossero in gioco due forze*. La forza in gioco è una sola, F_G, che, in un moto circolare uniforme "viene vista come" (o "le viene dato il nome di") forza centripeta. Per dirla ancora in un altro modo, $F_c = F_G$ va letta come "F_c è F_G".

8.5

Problemi:

- Satellite per osservazioni, 600 km di altezza dalla superficie terrestre: velocità; periodo dell'orbita.
- Satellite geostazionario: quanto dista dalla Terra?
- Luna: distanza dalla Terra a partire dal suo periodo di rivoluzione intorno alla Terra.
- Sapendo G e conoscendo distanza Terra-Sole (150 milioni di km) e il periodo di rivoluzione della Terra intorno al Sole, 'pesare il Sole'.

8.6

Molla: prime osservazioni sperimentali in aula. Ci ritorneremo.

9 Lunedi 20/3, 15:00–17:00

9.1

Esperimentini in classe con elastici e molla. Misura dell'intensità delle forze mediante molle opportunamente tarate → *dinamometro.* Bilancio della forze agenti su oggetto posato sul tavolo:

$$\vec{a} = 0 \rightarrow \vec{F} = 0 \rightarrow \{F_x = 0, F_y = 0\}\,,$$

ove si è indicata con x la componente orizzontale e con y la componente verticale (quest'ultima viene anche indicata con z, o anche semplicemente con x se il moto è unidimensionale: fare attenzione e cercare di capire dal contesto — comunque, la Fisica è indipendente dai simboli usati). Da queste condizioni cercare di capire dalle forza note che agiscono sul corpo quali sono le altre forze in gioco.

- Semplice caso di oggetto semplicemente posato. Lungo la verticale ci deve essere la forza peso $F_p = -mg$ (diretta verso il basso) e quindi una forza uguale e contraria dovuta al tavolo (T): $T + F_p = 0$, ovvero $T = mg$. Non vediamo nessuna forza sul piano orizzontale (o se ci sono, sono comunque uguali e contrarie). Più esattamente

$$\vec{F} \;=\; \{0,\ T - mg\} = \{0,\ 0\}. \tag{114}$$

Principio di azione e reazione (terzo principio della meccanica o terza legge di Newton). Esempi

- Oggetto esercita una forza $-mg$ sul tavolo $\Leftrightarrow$ tavolo esercita forza mg sull'oggetto.
- Terra esercita una forza sulla Luna (l'attrae verso di sé) $\Leftrightarrow$ la Luna esercita la stessa forza sulla Terra (l'attrae verso di sé): forze uguali e contrarie.
- etc. etc.

• Caso in cui l'oggetto è posato sul tavolo e tirato sul piano orizzontale mediante un elastico (importante per 'misurare', benché qualitativamente, la forza applicata). Osservazioni sperimentali:

  - molla si allunga, ma l'oggetto rimane fermo;
  - oltre un certo allungamento l'oggetto comincia a muoversi
  - se si traina l'oggetto con velocità costante (non facile con il tipo di 'esperimento povero') si nota che l'elastico rimane allungato, ma (osservando bene) è un po' meno allungato dell'ultimo istante in cui l'oggetto era ancora fermo.

  In entrambi i casi $a_x = 0$, ovvero $F_x = 0$, pur avendo una 'forza attiva' $F_a \neq 0$ (la forza con cui tiriamo il corpo mediante l'elastico): ci deve essere una forza resistente! **Forza di attrito**.

  Variazioni sul tema:

  - appesantiamo l'oggetto
  - cambiamo superficie di contatto (peso appoggiato su lucidi e su righelli)
  - una volta che il corpo si muove, proviamo a farlo andare con accelerazione costante (non facile!)

9.2

Attrito statico e dinamico. Dipendono dalle proprietà fisiche delle superfici di contatto (rugosità) e dalla forza normale alla piano (nel caso di piano orizzontale essa è semplicemente la forza peso). Non dipendono invece dall'estensione delle superfici di contatto. La dipendenza dalle proprietà fisiche delle superfici di contatto è modellizzata con un *coefficiente di attrito*

Attrito statico Va trattato alla stessa stregua di altre forze vincolari, come la forza che un tavolo esercita su un oggetto poggiato su di esso, la tensione di un filo inestensibile a cui è appeso un oggetto i binari che guidano i treni o le guide degli scivoli dei bambini. La forza dovuta ad essi è variabile e va ricavata dalla cinematica e dalle altre forze in gioco, ma non può eccedere un *limite di rottura*, in senso generico. (Ovviamente la trattazione elementare è grossolana, in quanto in pratica i vincoli si deformano, in particolarità in prossimità del limite di rottura (si immagini ad una corda a cui si appende un peso via via crescente.)

Nel caso dell'attrito statico il 'limite di rottura' è dato dalla forza massima che esso può esercitare:

$$F_{A_s} \leq \mu_s F_N \tag{115}$$

ove μ_s è il coefficiente di attrito statico e F_N la forza normale alla superficie. Direzione e verso vanno ricavati dalle altre forze in gioco. Nel caso di piano orizzontale e la sola forza che l'oggetto esercita sulla superficie è la forza peso si ha

$$F_{A_s} \leq \mu_s m g\,. \tag{116}$$

Attrito dinamico (Vedi punto 5 nell'elenco delle forze lezione 6/3/06). Riassumendo:

$$F_{A_d} = -\mu_d F_N \hat{v} \tag{117}$$

piano orizz., forza su piano mg :

$$F_{A_d} = -\mu_d m g \hat{v} \tag{118}$$

9.3

Alcuni problemi tipici con tensioni di fili/corde *inestensibili* e *senza peso*:

- inestensibile significa che la distanza fra i corpi legati non cambia, quindi si crea un vincolo fra le posizioni dei corpi;
- senza peso (più precisamente 'senza massa') significa massa trascurabile sia per quanto riguarda l'inerzia che la forza peso.

(In pratica sono delle idealizzazioni matematiche.)

9.3.1

Problema nr. 5 della lezione 3.
Prendendo il riferimento verso l'alto, questo è il bilancio delle forze, da cui l'accelerazione:

$$F = T - mg \tag{119}$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{T}{m} - g\,. \tag{120}$$

Le osservazioni sulla cinematica ci danno a (rispettivamente 0, $-g$ e g, dai dati del problema), da cui ci ricaviamo T:

$$T = m\,a + m\,g \tag{121}$$

ovvero

$$a = 0 \quad \rightarrow \quad T = m\,g \tag{122}$$

$$a = -g \quad \rightarrow \quad T = 0 \tag{123}$$

$$a = g \quad \rightarrow \quad T = 2\,m\,g\,. \tag{124}$$

Esperimentini in classe per giustificare il risultato. Domanda: se avete una busta della spesa il cui manico sta cedendo, cosa conviene fare? 1) proseguire tranquillamente; 2) abbassare rapidamente la busta; 3) alzarla bruscamente.

9.3.2

Problema del peso sul tavolo (liscio) tirato, mediante filo e opportuna carrucola, da un peso soggetto sospeso.
Bilancio delle forze:

- Su m_1 agisce la forza di gravità e la reazione del filo. Scegliendo il verso positivo verso il basso:

$$F_i = mg - T_1\,. \tag{125}$$

- Su m_2, che può scivolare sul tavolo:
  - Componente verticale (normale alla superficie del tavolo): la forza peso $m_2\,g$ è bilanciata dalla reazione del tavolo $\rightarrow$ forza totale nulla.
  - Componente orizzontale solo tensione del filo, diretta verso la carrucola: $F_2 = T_2$
- Ruolo della carrucola 'ideale', ovvero senza massa e senza attriti: serve solo a cambiare direzione e verso di applicazione della forza: $\rightarrow$ il problema è equivalente a quello in cui F_1 (sulla massa m_1 e fisicamente verticale) e F_2 (sulla massa m_2 e orizzontale) sono colineari (ad esempio si immagini m_i sullo stesso piano ove scivola m_2, ma con la forza peso che lo tira verso destra e la tensione della corda verso sinistra).
- Principio di azione e reazione: $T_1 = T_2 = T$

Possiamo quindi trattare il problema unidimensionalmente e scrivere semplicemente

$$F_1 = mg - T \tag{126}$$
$$F_2 = T \tag{127}$$

da cui seguono le accelerzaioni

$$a_1 = g - \frac{T}{m_1} \tag{128}$$
$$a_2 = \frac{T}{m_2} \tag{129}$$

ma, dato il vincolo di inestensibilità del filo, istante per istante la loro distanza è costante, ovvero i due corpi si muovono alla stessa velocità e con la stessa accelerazione: $a_1 = a_2 = a$, da cui:

$$a = g - \frac{T}{m_1} \tag{130}$$
$$a = \frac{T}{m_2}\,. \tag{131}$$

Risolvendo le due equazioni in due incognite otteniamo:

$$T = \frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\,g \tag{132}$$
$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,g\,. \tag{133}$$

Per capire se la soluzione è ragionevole è conveniente fare opportuni *limiti*, ovvero vedere se recuperiamo casi estremi alla cui soluzione arriviamo intuitivamente (**Abituarsi, specialmente per le applicazioni pratiche, a fare questo tipo di ragionamento!** Questo è praticamente l'unico modo per capire se iil risultato è ragionevole nei casi in cui non è dato di conoscere 'la soluzione' del problema, come succede sempre nella vita pratica: i problemi con la soluzione in fondo si incontrano solo nei libri di testo!)

- Limite per $m_2 \to \infty$ (ovvero, in pratica, $m_2 \gg m_1$):

$$T = m\,g \tag{134}$$
$$a = 0\,. \tag{135}$$

  ovvero il sistema le masse non si muovono, e la tensione è semplicemente quella che bilancia la forza peso su m_1: **OK**.

- Limite per $m_2 \to 0$ (ovvero, in pratica, $m_2 \ll m_1$):

$$T = 0 \tag{136}$$
$$a = g\,. \tag{137}$$

  m_1 cade con l'accelerazione di gravità g e si trascina m_2, che non oppone resistenza: **OK**.

Altro modo (da fisici) di risolvere il problema: sul sistema agisce la forza esterna $m_1\,g$ ed il sistema ha un'inerzia totale $m_1 + m_2$, da cui $a = m_1\,g/(m_1 + m_2)$.

9.3.3

Variazioni sul tema e **problemi proposti**:

1. Cosa succede, nel secondo problema se m_2 scivola con attrito, essendo il coefficiente di attrito μ_d?

2. Si immagini, sempre sullo stesso problema, che sia dato il valore m_2, inizialmente ferma e che fra m_2 e tavolo sia presente attrito, il cui coefficiente di attrito statico vale μ_s: trovare il valore di massimo di m_1 tale che i due corpi rimangano fermi.

3. Si immaginino quattro carrellini, tutti della stessa massa m e allineati su un tavolo che non offre attrito, collegati dai soliti fili inestensibili e senza peso. Al primo carrellino viene applicata, dall'esterno, una forza F, tale da trascinare il convoglio. Determinare l'accelerazione del trenino di carrellini e le tensioni dei fili fra i vari carrellini. Estendere la soluzione al caso di n carrellini.

4. Modificare il problema precedente, aggiungendo un attrito dinamico fra carrellini e piano del tavolo.

9.4

Osservazione: dal confronto delle (77) e (78) con le (79) e (80), scriviamo

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,x(t) = -\omega^2\,x(t) \tag{138}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,y(t) = -\omega^2\,y(t) \tag{139}$$

Ovvero "la derivata seconda rispetto al tempo di una grandezza è proporzionale all'opposto della grandezza stessa". Quando questo si verifica le (73) e (74) ci mostrano che la variazione nel tempo della grandezza fisica è data da una funzione seno e coseno. Ci vuole poco a capire che la particolare funzione dipende dalla scelta delle condizioni iniziali (nel nostro caso l'aver scelto $t = 0$ l'istante di transito per il punto $\{R, 0\}$). In generale, per la generica grandezza $z(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,z(t) = -\omega^2\,z(t) \quad\Longleftrightarrow\quad z(t) = A\,\cos(\omega t + \phi)\,, \tag{140}$$

ove l'ampiezza A e la fase ϕ dipendono dalle condizioni iniziali del problema.

9.5

Esperimento della molla. Dati sperimentali AA. 04/05

	A.A. 04/05				A.A. 05/06	
# dischi	x (s)	T (s)			x (s)	T (s)
		cr1	cr2	cr3		
0	1.8	—	—	—		
1	1.8	—	—	—		
2	1.8	—	—	—		
3	3.3	0.481	0.449	0.491		
4	4.9	0.539	0.566	0.560		
5	6.8	0.603	0.623	0.617		
6	8.5	0.664	0.693	0.672		
7	10.0	0.692	0.721	0.717		
8	11.8	0.757	0.777	0.770		
9	13.4	0.793	0.806	0.810		
10	15.1	0.846	0.875	0.846		

ove x è la posizione del punto terminale della molla, cr_i rappresentano i valori ottenuti dai tre cronometristi volontari e ogni dischetto pesa 79 g.
Osservazione della linearit` dell'allungamento in funzione della massa applicata (e quindi della forza applicata). Considerazioni dinamiche. Determinazione della costante k della molla.

→ Riportare dati sperimentali presi a lezione.

Come si scolge il moto, ovvero $x(t)$ e $v(t)$? (Usiamo la generica s per indicare lo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio.) Motivo fisico per cui la velocità non può avere forma triangolare con cuspiti nei punti di inversione del verso del moto. Ragionamenti intuitivi sul tipo di moto. [Ritorneremo sull'argomento].

10 Giovedi 23/3, 18:00–19:00

10.1

Corpo di massa m sta curvando con una certa velocità: ⇒ si considera, in un piccolo intervallo di tempo, tale che 1) la variazione di velocità si trascurabile e 2) la traiettoria possa essere approssimata localmente con un arco di cerchio:
→ raggio di curvatura istantaneo $R(t)$;
→ velocità istantanea $v(t)$;
→ accelerazione centripeta istantanea $a(t)$ [la stessa si avrebbe se il corpo seguitasse a muoversi di moto circolare uniforme su un cerchio di raggio $R(t)$ con velocità $v(t)$].

Questi sono i ragionamenti a cui si fa riferimento quando si parla di accelerazione centripetà di una macchina in curva o di raggio di curvatura di un tratto di strada.)

10.2

Caso di macchina in curva: forza centripeta è esercitata dall'attrito *statico* sulla superficie di contatto ruote-asfalto (le ruote, in condizioni normali, non scivolano!). Forza centripeta massima sarà quindi uguale alla massima forza di attrito statico, che vale, per fondo stradale orizzontale, $\mu_S\, m\, g$:

$$F_c = m\,\omega^2\,R = m\,\frac{v^2}{R} \quad \leq \quad \mu_S\, m\, g \tag{141}$$

$$\rightarrow \quad \frac{v^2}{R} \quad \leq \quad \mu_S\, g \tag{142}$$

che ci dà una condizione fra velocità e raggio di curvatura, noto il coefficiente di attrito statico. In particolare, fissato il raggio di curvatura troviamo la velocità massima e fissata la velocità troviamo il raggio minimo:

$$v \quad \leq \quad \sqrt{\mu_S\, R\, g} \tag{143}$$

$$R \quad \geq \quad \frac{v^2}{\mu_S\, g}\,. \tag{144}$$

Cosa succede se la condizione non è più valida? L'auto si metterà su una nuova traiettoria compatibile con le forze in gioco.

- Se il pilota si accorge che sta perdendo aderenza, può aumentare il raggio di curvatura R agendo sul volante (se la strada lo consente).
- Intuitivamente, sembrerebbe che possa anche frenare, diminuendo così v per mantenersi sulla stessa traiettoria, ma in realtà non è consigliabile (vedi dopo): bisogna frenare prima di entrare in curva!
- Una volta che cessa l'effetto dell'attrito statico, entra in gioco l'attrito dinamico e la macchina scivola. Ovviamente il problema è complesso in quanto un'auto non è un banale punto materiale ed, in particolare, bisogna tener conto del tipo di trazione (anteriore, ovvero le ruote tirano, o posteriore, ovvero le ruote spingono) e dal fatto che non tutte e quattro le ruote perdono aderenza simultaneamente. Se supponiamo una completa e simultanea perdita di aderenza di tutte le ruote, l'auto "parte per la tangente", frenata dalla sola forza di attrito dinamico $\mu_D\, m\, g$

Osservazione: è importante capire che in una ruota che rotola il punto di contatto con il suolo è fermo rispetto al suolo (non scivola). Lo vedremo in dettaglio quando faremo i moti relativi. Ed il punto di contatto è tenuto fermo proprio da una forza di attrito statico. Se questa viene meno, il punto più in basso della ruota scivola e la ruota comincia a slittare. Questo si verifica quando l'auto accelera o frena bruscamente Questo è il motivo per cui frenare in curva quando si sta per perdere aderenza peggiora la situazione: alla forza centripeta si aggiunge una componente tangenziale che frena la macchina, il modulo della risultante delle quali non può eccedere $\mu_S\, m\, g$: quindi se la macchina stava per perdere aderenza, la frenata aiuta a perderla prima.

10.3

Guida circolare disposta verticalmente: che velocità deve avere l'oggetto nel punto più alto per rimanere 'attaccato' sulla guida e non cadere ('cerchio della morte') Considerazioni cinematiche e dinamiche quando l'oggetto è *nel punto più in alto* della guida:

- Velocità assume un minimo e si può ritenere costante in un piccolissimo intervallo di tempo: approssimazione moto circolare uniforme OK;
- Dalla cinematica sappiamo che $F_c = m\,\omega^2\, R = \ v^2/R$.
- Bilancio delle forze:
  - Il corpo è sicuramente soggetto alla forza peso, $F = -mg$.
  - In ogni punto della guida c'è anche una reazione vincolare T che, punto per punto, fa curvare il corpo (se capisce facilmente che se un tratto della guida viene forato, o sostituito con della carta velina, quando il corpo arriva in quel punto esce fuori). Questa forza è sempre *normale alla superficie della guida* (qualsiasi componente tangenziale, dovuto ad esempio ad attriti, rallenterebbe il corpo! Le accelerazioni normali al vettore velocità sono le sole che non cambiano velocità: $\rightarrow$ vedi moto circolare uniforme). Quindi T, in ciascun punto della guida circolare è diretta come la forza centripeta.
  - Inoltre il corpo è soggetto alla forza peso, che nel punto più in alto è diretta come T, ovvero nel punto più in alto la forza centripeta è pari

alla somma di T e mg:

$$m\frac{v^2}{R} = mg + T \tag{145}$$
$$T = m\frac{v^2}{R} - mg \tag{146}$$

La condizione di contatto nel punto più in alto è che ci sia una pur piccola reazione vincolare, ovvero $T > 0$, da cui

$$m\frac{v^2}{R} - mg > 0 \tag{147}$$
$$\frac{v^2}{R} - g > 0 \tag{148}$$
$$v > \sqrt{R\,g} \tag{149}$$

10.4

Problemini:

- Sapendo che una vettura pesa 1000 kg, che il raggio di curvatura vale 200 m e che la velocità massima prima che le ruote perdano attrito e comincino a slittare vale 100 km/h, determinare il coefficiente di attrito statico ruote-asfalto.
- Calcolare la velocità che una macchinina deve avere, nel punto più alto, per compiere un giro su un 'loop' di diametro 50 cm di una pista giocattolo.
- Calcolare la reazione vincolare nel punto più basso della guida circolare di raggio R disposta verticalmente, se in tale punto la velocità vale v.

11 Venerdi 24/3, 14:00–16:00

11.1

Nota: Moti unidimensionali: attenzione alla differenza fra *spazio percorso* e *distanza* fra partenza e arrivo: per un quattrocentometrista in prima corsia, lo spazio percorso è pari a 400 m, mentre la distanza partenza-arrivo è zero.

Più precisamente, se $\vec{r}(t)$ è il raggio vettore della posizione in funzione del tempo, distanza fra partenza e arrivo data da

$$\Delta r|_{t_1}^{t_2} \;=\; |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)| \,. \tag{150}$$

Invece, lo spazio percorso s è dato sommando tutti gli spostamenti elementari, presi in valore assoluto, ovvero, sommando per ogni intervallino infinitesimo di tempo $\mathrm{d}t$ i contributi $\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ ('aggiungendo' la terza componente in eventuale moto in 3D).

Esempio: moto circolare fra t e $t + T$:

- Essendo le componenti $x(t) = R\cos\omega t$ e $y(t) = R\cos\omega t$ si vede come $\vec{r}(t + T) = \vec{r}(t)$, ovvero la distanza Δr è nulla.

- Spostamento elementare

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \;&=\; \sqrt{v_x^2\,\mathrm{d}t^2 + v_y^2\,\mathrm{d}t^2}\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,\mathrm{d}t & (151)\\ &=\; v\,\mathrm{d}t\,, & (152)\end{aligned}$$

  dove abbiamo usato il fatto che $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, da cui $\mathrm{d}x = v_x\,\mathrm{d}t$ (e analogalmente per la componente z), e che, nel moto circolare uniforme, vale $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v$, ovvero è costante nel tempo.
  Ne segue che in un tempo finito Δt lo spazio percorso vale $s = v\,\Delta t$. In particolare, dopo un periodo, ovvero per $\Delta t = T$:

$$s \;=\; v\,T = (\omega\,R)\cdot(2\,\pi/\omega) = 2\,\pi\,R \tag{153}$$

  ovvero una circonferenza, come deve essere.

11.2

Lancio di oggetti in presenza di gravità (sulla superficie terrestre) trascurando la resistenza dell'aria[5] $\vec{F} = \{0, -m\,g\} \Rightarrow$ moto lungo l'asse x è rettilineo uniforme;

[5] Altrimenti, in prima approssimazione, la si può modellizzare con una resistenza dipendente dalla velovità, ovvero una forza di viscosità $-\beta\,\vec{v}$, ovvero

$$\vec{F} \;=\; \vec{F}_G + \vec{F}_A = \{-\beta\,v_x,\; -m\,g - \beta\,v_y\}\,. \tag{154}$$

La soluzione è ben più complicata, la risolubile facilmente con metodi numerici (vedi programmino in C sul sito del corso → "gittate in presenza di resistenza del mezzo").
Esperimento in classe di lancio di gessetto e pallina da ping pong per capire qualitativamente l'effetto della resistenza dell'aria.

moto lungo l'asse y è uniformemente accelerato. Idea chiave: ogni proiezione si evolve per proprio conto.
Soluzione parametrica:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_x(t) = v_{x_0} \\ v_y(t) = v_{y_0} - g\,t \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + v_{x_0}\,t \\ y(t) = y_0 + v_{y_0}\,t - \frac{1}{2} g\,t^2 \end{array} \right. \tag{155}$$

(Nota ovvia: queste equazioni valgono in assenza della resistenza dell'aria e finchè il corpo non incotra ostacoli).

- Sasso lanciato orizzontalmente da una torre.
- Problema della gittata, in funzione di velocità iniziale del proiettile e dell'angolo di lancio.

11.2.1

Soluzione del problema della gittata mediante l'equazione della traiettoria.
Dall'equazione parametrica delle componenti all'equazione della traiettoria:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array} \right. \Rightarrow y(x)$$

eliminando la variabile tempo dal sistema di equazioni: $t = f(x)$, $\rightarrow y[(f(x)] \rightarrow y(x)$. Nel caso del problema della gittata si ha:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0\,\cos\alpha\,t && (156) \\ y(t) &= v_0\,\sin\alpha\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 && (157) \\ \rightarrow \quad t(x) &= \frac{x}{v_0\,\cos\alpha} && (158) \\ \rightarrow \quad y(x) &= y(t(x)) && (159) \\ &= v_0\,\sin\alpha\,\frac{x}{v_0\,\cos\alpha} - \frac{1}{2}\,g\,\left[\frac{x}{v_0\,\cos\alpha}\right]^2 && (160) \\ &= \tan\alpha\,x - \frac{g}{2\,v_0^2\,\cos^2\alpha}\,x^2 && (161) \end{aligned}$$

Diverso significato delle $x(t)$ e $y(t)$ rispetto a $y(x)$, ed in particolare di $y(t)$ rispetto a $y(x)$. Queste ultime due curve sono entrambe delle parabole, ma la prima in funzione del tempo, mentre la seconda rappresenta veramente la traiettoria parabolica osservata. Il motivo per cui in entrambi i casi sono delle parabole è che x e t sono lineari. Se invece avessiomo avuto un moto accelerato sia in x che in t avremm avuto una retta nel piano $x - y$.

Una volta nota la curva $y(x)$, determinare il massimo e la gittata diventa un problema matematico (massimo della funzione e intersezione della traiettoria con l'asse x.

Determinazione dell'angolo rispetto all'asse delle ascisse (ovvero al piano orizzontale nel caso di lancio di proiettile, ove y sta per la quota):

- dalla equazione della traiettoria: $\tan\theta = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ (per definizione);
- dalle componenti del vettore velocità: $\tan\theta = v_y/v_x$ (più meno intuitivamente e come visto nel moto circolare uniforme).

Nota:

$$v_y/v_x = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} : \tag{162}$$

punto per punto il vettore velocità è parallelo alla tangente alla traiettoria.

11.2.2

Soluzione 'fisica' del problema della gittata: proiettile con velocità v_0 ed angolo α rispetto al piano orizzontale.

- Il tempo che il proiettile impiega ad arrivare nel punto piàlto è pari al tempo che impiega la componente verticale della velocità ad annullarsi:
$$t = \frac{v_0\,\sin\alpha}{g}\,. \tag{163}$$
- Per simmetria, il proiettile impiega lo stesso tempo a tornare sul piano orizzontale, quindi il 'tempo di volo' totale vale
$$t_v = 2\,\frac{v_0\,\sin\alpha}{g} \tag{164}$$
- In questo tempo la componente orizzontale è avanzata di
$$\Delta x = v_0\,\cos\alpha\,t_v = \frac{2\,v_0^2\,\sin\alpha\,\cos\alpha}{g} \tag{165}$$
$$= \frac{v_0^2}{g}\,\sin 2\alpha\,, \tag{166}$$
ove è stata utilizzata la formula trigonometrica $\sin 2\alpha = 2\,\sin\alpha\,\cos\alpha$.

- Gittata massima: $\rightarrow \alpha = \pi/4$ (45^o)
- Angolo di impatto: per simmatria uguale ad angolo di lancio; oppure dalle componenti del vettore velocità, che sono $v_0\, \cos\alpha$ e $-v_0\, \sin\alpha$.
- Altezza massima raggiunta:
  - velocità da quando parte a quando è nel punto più in alto, varia linearmente, con valore medio $(v_0\, \sin\alpha)/2$;
  - lo spazio persorso fino al punto più alto è quindi pari alla velocità media per il tempo che ci mette ad arrivare in alto:

$$y_{max} = \frac{v_0\, \sin\alpha}{2}\,\frac{v_0\, \sin\alpha}{g} \tag{167}$$

$$= \frac{v_0^2\, \sin^2\alpha}{2\, g} = \frac{v_{0_y}^2}{2\, g}\,. \tag{168}$$

  Quest'ultima formula ci dà l'espressione generale dello *spazio di frenata*:

$$\frac{v_0^2}{2\,|a|}\,, \tag{169}$$

  anche uguale allo spazio percorso affinché arrivi, con accelerazione costante, a v_0.
  Nota di sicurezza stradale: a parità di forza frenante del veicolo, lo spazio di frenata va come il quadrato della velocità iniziale. A tale spazio va aggiunto quello, dovuto ai riflessi, prima che si cominci a frenare.

- Spazio percorso lungo la traiettoria. In questo caso, l'espressione di dx vale

$$\mathrm{d}s = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,\mathrm{d}t \tag{170}$$

$$\sqrt{v_0^2 \cos\alpha^2 + (v_0\, \sin\alpha - g\, t)^2}\; \mathrm{d}t\,, \tag{171}$$

  e, contrariamente al caso del moto circolare uniforme, non ha una forma semplice e quindi l'integrale $\int_0^{t_v} \mathrm{d}s$ non è affatto banale. Il problema può essere comunque risolto numericamente, calcolandosi, per ogni intervallino sufficiente piccolo Δt_i, lo spostamento Δs_i.

11.3

Di nuovo su **molla**. Se la lunghezza iniziale[6] era L_0 e aggiungo una massa $m \rightarrow$ posizione di equilibrio L_{eq}, tale che forza elastica bilancia forza di gravità. Con riferimento verso il basso:

$$mg - k\,(L_{eq} - L_0) \;=\; 0\,. \tag{177}$$

Per una generica posizione $L = L_{eq} + x$

$$\begin{aligned} F_x &= mg - k\,(L - L_0) = mg - k\,(L_{eq} + x - L_0) &(178)\\ &= mg - k\,(L_{eq} - L_0) - k\,x &(179)\\ F_x(x) &= -k\,x\,. &(180)\end{aligned}$$

Ricordando "$F = m\,a$", otteniamo

$$a_x(x) = -(k/m)\,x\,, \tag{181}$$

ovvero

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2} \;=\; -\frac{k}{m}\,x\,. \tag{182}$$

$\Rightarrow$ Ricorda qualcosa?

[6]In realtà, non è necessario assumere una completa linearità della molla (che fra l'altro non puè esistere per sollecitazioni troppo piccole o troppo grandi). Assumiamo di avere una generica espressione della forza in funzione dell'allungamento: $F(L) = f(L)$, tale che, comunque, data una certa forza applicata mg l'allungamento di equilibrio sia per L_{eq}, ovvero

$$mg - f(L_{eq}) \;=\; 0\,. \tag{172}$$

Sviluppando in serie $f(L)$ intorno a L_{eq} e chiamando x la differenza fra L e L_{eq} (come nel testo), abbiamo:

$$F(L_{eq} + x) \;=\; f(L_{eq}) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{L_{eq}} x\,, \tag{173}$$

da cui la forza totale

$$\begin{aligned} F_x &= mg - F(L_{eq} + x) = mg - \left[f(L_{eq}) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{L_{eq}} x\right] &(174)\\ &= [mg - f(L_{eq})] - \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{L_{eq}} x &(175)\\ F_x(x) &= -k\,x &(176)\end{aligned}$$

11.4

Pozzo per il centro della Terra. Forza gravitazionali fra corpi non puntiformi: $\vec{F} = \sum_i F_i = \sum_i \frac{G\,\mu_i\,m}{r_i^2}\hat{r}_i$ (se m è di un corpo puntiforme). Attrazione gravitazionale fra una massa distribuita uniformemente sulla superficie di una sfera e un punto materiale interno o esterno ad essa (consequenze del teorema di Gauss: dimostrato a lezione che gusci sferici aventi densità di massa uniforme non producono alcuna forza su masse all'interno di essi). Applicazione al problema del 'pozzo per il centro della Terra': forza gravitazionale in funzione della distanza R dal centro della Terra.

$$\begin{aligned} F(R) &= -\frac{G\,M(R)\,m}{R^2} && (183)\\ &= -\frac{G\,\rho\,V(R)\,m}{R^2} && (184)\\ &= -\frac{G\,\rho\,4/3\,\pi\,R^3\,m}{R^2} && (185)\\ &= -\frac{4}{3}\,\pi G\,\rho\,m\,R && (186)\end{aligned}$$

ove ρ indica la densità della terra ($5.5\,10^3\,\mathrm{kg/m^3}$). Questa espressione è valida nella metà del pozzo da noi al centro della Terra. Per esetenderla nella seconda metà, sostituiamo nella formula R con r, indicando con quest'ultima una coordinata lungo il pozzo, che ha origine nel centro della Terra e verso positivo verso di noi:

$$F(r) = -\frac{4}{3}\,\pi G\,\rho\,m\,r. \qquad (187)$$

Si può verificare facilemente che in entrambe le metà del pozzo (corrispondneti a $r > 0$ e $r < 0$) la forza è sempre diretta verso il centro della Terra.

Da "$F = m\,a$" e ricordandoci che si tratta di un'accelerazione lungo il raggio, segue

$$\begin{aligned} a_r(r) &= -\frac{4}{3}\,\pi G\,\rho\,m\,r, && (188)\\ &= -\frac{g}{R_T}\,r\,, && (189)\end{aligned}$$

ove l'ultima espressione è stata ottenuta ricordandoci che sulla superficie della Terra, ovvero per $r = R$, deve valere $a_r(R_T) = -g$, ovvero $-\frac{4}{3}\,\pi\rho\,G\,R_T = -g$,

la quale ci permette di sostituire g/R_T a $-\frac{4}{3}\pi\rho\, G$ (bastava anche semplicemente pensare che l'accelerazione è lineare in r e per $r = R_T$ sappiamo che vale $-g$).
Riscrivendo a_r come derivata seconda rispetto ad r, otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\, t^2} = -\frac{g}{R_T}\, r\,, \qquad (190)$$

⇒ Ricorda qualcosa?

11.5

Operazioni su vettori: abbiamo già incontrato prodotto di un vettore per uno scalare (es. $\vec{F} = m\,\vec{a}$) e operatore derivata (es. $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$).
Somma di vettori: dati $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ e $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, dal punto di vista matematico il vettore somma $\vec{c}$, ovvero $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ è ottenuto sommando le componenti, ovvero $c_x = a_x + b_x$, etc.
Rappresentazione grafica in 2D: 'contatenazione delle frecce' e regola del parallelogrammo.

Dal punto di vista matematico, si possono eseguire tranquillamente operazioni su e fra vettori. Dal punto di vista fisico, invece:

- si possono solo sommare grandezze omogenee, e quindi, solo vettori omogenei ("mele con mele e patate con patate", some si diceva alle elementari);
- va prima provato che tale operazione abbia senso, ad esempio
  - Somma di due forze: $\vec{F}_c = \vec{F}_a + \vec{F}_b$: l'effetto di dell'applicazione simultanea di $\vec{F}_a$ e $\vec{F}_b$ è esattamenta uguale a quella di $\vec{F}_c$ se le due forze sono applicate ad un punto materiale. L'effetto è un più complicato se le forze sono applicate ad un corpo esteso.
  - Somma di due velocità: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_3$ ha senso se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ hanno un significato ben preciso e se le velocità sono molto piccole rispetto a quella della luce (trasformazione Galileiana delle velocità, vedi nel seguito.). Se invece le velocità sono confrontabili con quella della luce tale formula di somma non è applicabile (→ teoria della relatività ristretta di Einstein).

11.6

Problemini

1. Date due forze, espresse in Newton, $F_1 = \{2, -1, 3\}$ e $F_2 = \{1, 2, 1\}$, determinare le intensità delle due forze e della loro risultante.

2. Date due forze, espresse in Newton, $F_1 = \{2, -1\}$ e $F_2 = \{2, 2\}$, trovare per via grafica l'intensità della forza risultante.

3. Tre particelle cariche, aventi la stessa carica elettrica Q si trovano ai vertici di un triangolo equilatero di lato l. Determinare la forza che agisce su ciascuna di essa (indicare graficamente anche direzione e verso).

4. Quattro particelle cariche sono disposte ai vertici di un quadrato di lato l. Le cariche tutte uguali in modulo, ma due sono positive e due negative e le cariche dello stesso segno sono su vertici opposti. Determinare la forza che agisce su ciascuna carica.

5. Determinare la relazione che deve intercorrere fra massa e carica di due particelle identiche (stessa carica e stessa massa) affinché si annulli la forza mutua.

6. Sul problema precedente: si determini la carica di tale particella, supponendo che abbia una massa di $1\,\mu$g (microgrammi). A quante cariche elettriche elementari (ovvero cariche di un protone, $q_p = 1.6 \times 10^{-19}\,$C) corrisponde tale carica?

12 Lunedi 27/3, 15:00–17:00

12.1

Esperimento dello scopettone (illustrato e proposto per casa): bilancio fra attrito statico e attrito dinamico.

12.2

Trasformazione galileiana delle velocità, con esempi del tapis roulant e del nuotatore sul fiume, etc.

Sia P un punto che si muove nel sistema di riferimento S con origine di coordinate in O, mentre il sistema di riferimento S è in moto *rettilineo uniforme* rispetto ad altro sistema di riferimento S' con origine O'. Il problema è, date $\vec{v}_O(P)$ e $\vec{v}_{O'}(0)$ di trovare $\vec{v}_{O^prime}(P)$. Chiamando i raggi vettore $\vec{r}_O(P)$ e $\vec{r}_{O'}(O)$, abbiamo, istante per istante,

$$\vec{r}_{O'}(P) \;=\; \vec{r}_{O'}(O) + \vec{r}_O(P)\,. \tag{191}$$

In un intervallo di tempo infinitesimo dt si hanno, per effetto delle velocità, le seguenti variazioni infinitesime:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{r}_O(P) &= \vec{v}_O(P)\,\mathrm{d}t && (192)\\ \mathrm{d}\vec{r}_{O'}(O) &= \vec{v}_{O'}(O)\,\mathrm{d}t && (193)\\ \mathrm{d}\vec{r}_{O'}(P) &= \mathrm{d}\vec{r}_O(P) + \mathrm{d}\vec{r}_{O'}(O) = \vec{v}_O(P)\,\mathrm{d}t + \vec{v}_{O'}(O)\,\mathrm{d}t\,, && (194) \end{aligned}$$

da cui, ricordando che O si muove in modo rettilineo uniforme rispetto ad O':

$$\begin{aligned} \vec{v}_{O'}(P) \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{O'}(P)}{\mathrm{d}t} &= \vec{v}_O(P) + \vec{v}_{O'}(0) && (195)\\ \vec{a}_{O'}(P) \equiv \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_{O'}(P)}{\mathrm{d}t^2} &= \vec{a}_O(P)\,. && (196) \end{aligned}$$

Sistemi che si muovono di moto relativo rettilineo uniforme (e in moto rettilineo uniforme rispetto alle stelle fisse) sono chiamati *sistemi di riferimento inerziali.* In questi sistemi: $\rightarrow$ stesse accelerazioni e quindi stesse forze.
[**(parentesi fuori programma)** Somma delle velocità: va in crisi quando la somma è confrontabile (o addirittura supera) la velocità della luce, costante e uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Tale formula di trasformazione (galileiana) non va pi˘bene e va sostituita con le *trasformazioni di Lorentz* (relatività ristretta). Comunque, tanto per capire, dov'era il punto debole della dimostrazione di sopra? $\rightarrow$ aver assunto i dt uguali nei due sistemi di riferimento, ovvero aver ipotizzato un tempo assoluto che scorre nello stesso modo sia nel sistema di riferimento in cui l'osservatore è a riposo che in tutti gli altri sistemi di riferimento.]

Caso del nuotatore sul fiume:

$$\vec{v}_{nR} \;=\; \vec{v}_{nF} + \vec{v}_{FR}\,, \tag{197}$$

ove $\vec{v}_{FR}$ è la velocità del fiume rispetto alla riva, $\vec{v}_{nF}$ la velocità del nuotatore rispetto al fiume e $\vec{v}_{nR}$ la velocità del nuotatore rispetto alla riva. Scegliendo opportunamente gli assi abbiamo $\vec{v}_{FR} = (v_F, 0)$, $\vec{v}_{nF} = (v_L, v_T)$ (ove v_L e v_T stanno per velocità longitudinale e trasversale rispetto alla corrente), per cui $\vec{v}_{nR} = (v_F + v_L, v_T)$. Casi elementari sono quando la velocità del nuotatore è solo lungo la corrente o trasversale ad essa.

12.2.1

Problemi:

1. Un fiume, di larghezza L scorre con velocità v_F. Un nuotatore nuota con velocità v_T su un fiume in direzione trasversale a quella di scorrimento della corrente.
   (a) A che velocità si muove rispetto alla riva? (vettore e modulo)
   (b) Trovare l'angolo fra la direzione del moto del nuotatore e quella di scorrimento dell'acqua.
   (c) Quanto tempo impiegherà ad attraversare il fiume?
   (d) Per quanto viene trascinato a valle durante l'attraversamento?

2. Si immagini una gara di nuoto su un fiume, con le corsie, lunghe 50 m, disposte parallelamente al verso della corrente. Il fiume ha una velocità di 1 m/s. Calcolare il tempo che un centometrista farà sul fiume se nuota ad una velocità tale che in una piscina olimpionica ($2 \times 50\,\mathrm{m}$) avrebbe fatto 60 s netti.

3. Un'auto viaggia con velocità v ed ha ruote di raggio R. Assumendo che (come succede effettivamente, a meno che l'auto non perda aderenza) il punto di contato della ruota con l'asfalto sia istante per istante fermo rispetto all'asfalto (ovvero non slitta), determinare la velocità angolare della ruota e la velocità, rispetto al suolo, del punto più alto della ruota.

12.3

Di nuovo osservazione di oggetto fermo sul tavolo, tirato mediante elastico ma tenuto fermo da forza di attrito statico:

- inventario delle forze ($\vec{a} = 0!$): quattro forze in totale, che si bilanciano due a due. In particolare, due di queste sono di tipo vincolare (reazione del piano tel tavolo verso l'alto e forza di attrito statico orizzontale);

- inventario di quattro oggetti che subiscono le forze uguali e contrarie, secondo il principio di azione/reazione: Terra, mano che tira e tavolo (due volte: normale e orizzontale). Esperimento interponendo fra l'oggetto e il tavolo un foglio: oggetto→foglio→tavolo: la forza di attrito statico permette al corpo di trascinare il foglio (non il tavolo solo perché molto più pesante).

Cosa succede se si inclina il piano di appoggio? Fino ad un certo angolo l'oggetto sta fermo, poi comincia a scivolare.
Deposizione forze si basa sul principio che se l'effetto di tante forze che agiscono su un punto materiale è esattamente uguale ad una sola forza, uguale alla somma vettoriale delle varie forze, allora una forza può essere sempre vista come somma di altre. Questa modellizzazione è utile in quanto una della componenti può essere bilanviata da una forza nota o da una reazione vincolare e quindi il movimento dipende solo dalle componenti non bilanciate.

Piano inclinato e decomposizione della forza peso in componente tangenziale e componente normale al piano:

$$F_{G_n} = m\,g\,\cos\alpha \tag{198}$$
$$F_{G_t} = m\,g\,\sin\alpha\,, \tag{199}$$

ove α è l'angolo rispetto al piano orizzontale. Ovviamente in questi problemi didattici, si assume che il piano inclinato sia indeformabile e quindi c'è una reazione vincolare normale al piano inclinato indipendentemente da mg, ovvero:

$$F_{G_n} + T = 0\,. \tag{200}$$

Si noti che nell'analisi del piano inclinato è conveniente considerare un sistema di riferimento con la x lungo il piano con verso positivo tipicamente verso il basso e asse y ortogonale al piano inclinato. Quindi quest'ultima equazione si era lungo l'asse y e non entra nell'equazione del moto dell'oggetto.
Per il moto lungo il piano si hanno i tre casi notevoli: assenza di attrito; corpo fermo per effetto di attrito statico; corpo che scivola frenato da attrito dinamico.

- **Piano inclinato senza attrito**

$$F_t = m\,g\,\sin\alpha \tag{201}$$
$$a_t = g\,\sin\alpha \tag{202}$$

→ moto uniformemente accelerato con accelerazione $g\,\sin\alpha$.

- **Piano inclinato** con corpo tenuto fermo da **attrito statico**:

$$m\,g\,\sin\alpha - F_{A_s} \;=\; 0\,. \tag{203}$$

Massimo valore di α corrisponde al massimo valore che può avere l'attrito statico prima che "il vincolo sia rotto":

$$F_{A_s} \;\leq\; \mu_s\, m\, g\, \cos\alpha\,. \tag{204}$$

Dalle (203) e (204) abbiamo

$$F_{A_s} = m\,g\,\sin\alpha \;\leq\; \mu_s\, m\, g\, \cos\alpha \tag{205}$$
$$\sin\alpha \;\leq\; \mu_s\, \cos\alpha \tag{206}$$
$$\tan\alpha \;\leq\; \mu_s\,, \tag{207}$$

ovvero c'è attrito statico finché $\alpha \leq \mathrm{atan}\,\mu_s$. Questa relazione permette di ricavarsi μ_s dall'angolo massimo α_{max} in cui il corpo sta ancora fermo: $\mu_s = \tan\alpha_{max}$.

- **Piano inclinato con attrito dinamico**

$$F_t \;=\; m\,g\,\sin\alpha - \mu_d\, m\, g\, \cos\alpha \tag{208}$$
$$a_t \;=\; g\,\sin\alpha - \mu_d\; g\, \cos\alpha\,. \tag{209}$$

12.3.1

Problemi:

1. Un coltellino svizzero è fermo su una cartellina rigida di lati 35 e 26 cm posta su un piano orizzontale. Successivamente esso viene inclinato, facendolo ruotare intorno al lato più corto. Il coltellino comincia a scivolare quando l'altro lato corto si è alzato di 20 cm rispetto al piano orizzontale. Determinare il coefficiente di attrito statico.

2. Un corpo sta fermo su una tavola di legno finché l'angolo fra la tavola e il piano orizzontale si mantiene inferiore a 20 gradi. i) trovare il coefficiente di attrito statico μ_s; 2) Calcolare quanto vale la forza dovuta all'attrito statico quando la tavola è inclinata di 10 gradi.

3. Assumendo un coefficiente di attrito statico di 0.1, determinare la frequenza minima (in giri al minuto) a cui deve ruotare un rotor del diametro di 5 metri affinché una persona resti attaccata alla parete quando il pavimento viene rimosso.

4. Un oggetto viene lanciato con velocità iniziale di 10 m/s su un piano inclinato di $\theta = 30^o$ e avente un coefficiente di attrito dinamico (per quell'oggetto) di $\mu_d = 0.3$. Determinare la quota massima, rispetto al piano orizzontale, al quale arriva l'oggetto.

5. Un corpo è posto a riposo al centro di una tavola orizzontale lunga 2 metri. Si conoscono i coefficienti di attrito corpo-piano: $\mu_s = 0.8$ e $\mu_d = 0.5$. La tavola viene gradualmente inclinata finché il corpo non comincia muoversi, quindi l'inclinazione rimane costante. Trovare: a) angolo massimo di inclinazione; b) tempo che il corpo impiega a raggiungere il bordo della tavola.

12.4

Moto del **pendolo**: massa m legata ad un punto da un filo inestensibile di lunghezza l e massa trascurabile. Coordinata curvilinea s lungo la circonferenza, con $s = 0$ in corrispondenza della verticale e verso positivo quando l'angolo θ è "a destra". Scomposizione delle forze:

$$m\,g\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \text{compensata dalla tensione del filo} \tag{210}$$
$$-m\,g\sin\theta \quad\Rightarrow\quad \text{forza tangente} \Rightarrow \text{moto di}\, m. \tag{211}$$

Di nuovo, da "$F = m\,a$", segue

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\,t^2} = -g\,\sin\theta \tag{212}$$
$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\,t^2} = -g\,\sin\theta \tag{213}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\,t^2} = -\frac{g}{l}\,\sin\theta, \tag{214}$$

ove abbiamo usato la relazione $s = l\,\theta$ (che deriva dalla definizione di radiante: $\theta = s/l$). Nell'approssimazione di piccoli angoli ($\theta \ll 1$, con θ espresso in radianti): $\sin\theta \approx \theta$, ove l'approssimazione si intende valida per $\theta \lessapprox 0.1$, ovvero $\lessapprox 5$ gradi:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\,t^2} \approx -\frac{g}{l}\,\theta\,. \tag{215}$$

Cosa ci ricorda?

13 giovedi 30/3, 18:00–19:00

13.1

Uso di **integrali**[7] della cinematica, con esercizi. Immaginiamo di conoscere la funzione con la quale l'accelerazione cambia con il tempo: $a(t)$, ad esempio $a(t) = \alpha + \beta\, t + \gamma\, t^2$, ove $\alpha = 3\,\mathrm{m/s^2}$, $\beta = -2\,\mathrm{m/s^3}$, $\gamma = 1\,\mathrm{m/s^4}$, dalle condizioni iniziali $x_0 = x(t=0) = 10\,\mathrm{m}$ e $v_0 = v(t=0) = -1\,\mathrm{m/s}$. Siamo interessati a calcolare $v(t)$ e $x(t)$. Ricordiamo quanto visto nelle prime lezioni:

$$\begin{aligned} \Delta v|_{t_1}^{t_2} &= \sum_i a_i\,\Delta t_i && (216)\\ &\to \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,\mathrm{d}t && (217)\\ v(t_2) - v(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,\mathrm{d}t && (218)\\ v(t_2) &= v(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,\mathrm{d}t\,. && (219) \end{aligned}$$

Se $t_1 = 0$, $t_2 = t$ e indichiamo $v(t=0)$ con v_0:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t')\,\mathrm{d}t'\,. \qquad (220)$$

Analogalmente per $x(t)$:

$$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t \qquad (221)$$

e

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t')\,\mathrm{d}t'\,. \qquad (222)$$

Nel caso dell'esempio $a(t) = \alpha + \beta\, t + \gamma\, t^2$:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \alpha\, t + \frac{\beta}{2}\, t^2 + \frac{\gamma}{3}\, t^3 && (223)\\ x(t) &= x_0 + v_0\, t + \frac{\alpha}{2}\, t^2 + \frac{\beta}{6}\, t^3 + \frac{\gamma}{12}\, t^4\,. && (224) \end{aligned}$$

[7] Sostanziamente faremo uso soltanto di integrali di alcune funzioni elementari: potenze (incluso il reciproco) ed esponenziale. Si noti inoltre il significato fisico che si dà alla 'costante di integrazione' che compare negli integrali definiti.

Se $\beta = 0$ e $\gamma = 0$ riotteniamo le ben note formule del moto uniformemente accelerato.
Se è dato il vettore $\vec{a}(t)$, basta applicare questi ragionamente a ciascuna componente. Se, infine, è data $\vec{F}(t)$, basta ottenere $\vec{a}(t) = \vec{F}(t)/m$ e ricondursi al caso precedente.

13.2

Problema del cannoncino: $m_c = 2\,\mathrm{kg}$, $m_p = 10\,\mathrm{g}$, $L = 20\,\mathrm{cm}$, $v_p = 200\,\mathrm{m/s}$, accelerazione costante: trovare tempo di transito nel cannoncino, accelerazione del proiettile e forza agente sul proiettile. Trovare inoltre accelerazione del cannoncino e sua velocità finale (si suppone sia libero di scibolare sul piano).

- 0-200 m/s ad a_p costante nei 20 cm del cannone: $\rightarrow v_m = 100\,\mathrm{m/s}$; tempo impiegato ad attraversare il cannone: $\Delta t = L/v_m = 2 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{ms}$. Da cui accelerazione $a_p = \Delta v/\Delta t = 10^5\,\mathrm{m/s^2}$ (=10000 g: una cannonata!).

- [Oppure usando la formula della 'frenata', viste precedentemente:

$$\begin{aligned} s &= \frac{v^2}{2\,a} && (225)\\ a &= \frac{v^2}{2\,a} = \frac{v}{2}\frac{v}{s}\,, && (226)\end{aligned}$$

  che, come si vede, porta allo stesso risultato.]

- Forza che ha agito sul proiettile: $F_p = m_p\,a_p = 1000\,N$.

- Ma una forza uguale a contraria agisce sul cannoncino nello stesso tempo.

$$\begin{aligned} F_c &= -F_p && (227)\\ a_c &= \frac{F_c}{m_c} = -\frac{m_p}{m_c}\,a_p && (228)\\ v_c &= a_c\Delta t = -\frac{m_p}{m_c}\,a_p\Delta t = -\frac{m_p}{m_c}\,v_p. && (229)\end{aligned}$$

  Si noti la relazione:

$$v_c\,m_c = -m_p\,v_p\,, \qquad (230)$$

  ovvero

$$v_c\,m_c + m_p\,v_p = 0. \qquad (231)$$

13.3

Per capire meglio il significato di queste combinazioni "$m_i\, v_i$" che compaiono in queste formule, ripartiamo da "$F = m\, a$", usando il generico simbolo m per la massa (immaginiamo del proiettile, ma è irrilevante):

$$\begin{aligned} F &= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} & (232)\\ &= \frac{\mathrm{d}(m\,v)}{\mathrm{d}t} & (233)\\ &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} & (234) \end{aligned}$$

avendo chiamato indicato $p = m\,v$ la **quantità di moto** dell'oggetto di massa m (in generale $\vec{p} = m\vec{v}$). Questo è un altro modo (quello orininario di Newton!) di introdurre il secondo principio della meccanica.
Se F è costante segue

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p} &= \vec{F}\,\Delta t & (235)\\ \vec{p}(t_2) &= \vec{p}(t_1) + \vec{F}\times(t_2 - t_1) \quad (F \text{ costante})\,. & (236) \end{aligned}$$

La quantità "$\vec{F}\,\Delta t$", per $\vec{F}$ costante in Δt, è chiamata *impulso della forza*: $\rightarrow$ causa una variazione di quantità di moto.
Ne segue, per la velocità

$$\begin{aligned} \Delta\vec{v} &= \frac{1}{m}\vec{F}\,\Delta t & (237)\\ \vec{v}(t_2) &= \vec{v}(t_1) + \frac{1}{m}\vec{F}\times(t_2 - t_1) \quad (F \text{ costante})\,. & (238) \end{aligned}$$

Abbiamo trovato un modo semplice per ricavarsi la quantità di moto (e quindi la velocità del proiettile).

Se invece la forza non è costante, è sufficiente sommare, in analogia a quanto visto per le variazioni di posizione e di velocità, gli impulsi in piccoli intervalli di tempo.

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p}\,\Big|_{t_1}^{t_2} &= \sum_i \Delta\vec{p}_i = \sum_i \vec{F}_i\,\Delta t_i & (239)\\ &\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t\,. & (240) \end{aligned}$$

Questa espressione definisce l'impulso di una forza anche per forze variabili con il tempo. Quindi, in generale:

$$\Delta\vec{p}\,\Big|_{t_1}^{t_2} \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{241}$$

[Segue lezione seguente, par. 14.3.]

13.4

Problemini

1. Una palla da tennis di 60 g viaggia a 100 k/m e rimbalza su una parete, tornando nella stessa direzione alla stessa velocità. Assumendo che la pallina si contragga di 2 cm e che la forza nell'urto sia costante, calcolare: variazione di quantità di moto della pallina; il tempo totale di interazione pallina-parete; forza che agisce sul parete durante tempo di interazione.

2. Stesso problema, ma con palla d'acciaio su 'parete d'acciao', assumendo contrazioni di 1 mm e di 0.1 mm.

3. Una forza varia nel tempo secondo la seguente espressione: $F(t) = \alpha + \beta/(1+t)$, con $\alpha = 2\,\mathrm{N}$ e $\beta = 3\,\mathrm{N\,s}$. Sapendo che essa agisce per un secondo (dall'istante $t = 0$) su un corpo di massa 10 g inizialmente a riposo, calcolare la velocità finale del corpo.

4. Un cannoncino spara un proiettile di 20 g a 600 k/h e rincula a 10 m/s. Calcolare la massa del cannoncino.

14 venerdi 31/3, 14:00–16:00

14.1

Ricordiamo alcuni problemi che hanno portato a simili relazioni fra accelerazione e posizione.

- Pendolo: $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\,\theta\,.$
- Molla: $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}\,x\,.$

- Pozzo lungo diametro terrestre: $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\, t^2} = -\frac{g}{R_T}\, r$.
- Proiezione x moto circ. unif.: $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\, t^2} = -\omega^2\, x$.
- Proiezione y moto circ. unif.: $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\, t^2} = -\omega^2\, y$.

Sono tutte del tipo

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\, t^2} = -K\, z\,, \tag{242}$$

ove z è una generica variabile dipendente dal tempo, ovvero $z(t)$ e K è una costante positiva, avente le dimensioni dell'inverso del quadrato di un tempo. *Equazione differenziale*: la soluzione non è un numero (o più numeri) come nelle normali equazioni (algebriche), ma una funzione.

Per capire meglio, facciamo ancora un esempio: satellite in robita radente lungo la superficie terrestre ('esperimento concettuale'): moto circolare uniforme con $v = \sqrt{g\, R_T}$, periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{R_T}{g}}$ e velocità angolare $\omega = \sqrt{\frac{g}{R_T}}$, ovvero $\omega^2 = \frac{g}{R_T}$. La proiezioni di questo moto circolare uniforme un diametro preso lungo l'asse x, soddisfa alla relazione $a = -\omega^2\, x = -g/R_T\, x$. È la stessa relazione fra accelerazione e posizione del problema del pozzo: questo puè essere visto come la proiezione del moto circolare del satellite in orbita radente! In particolare, nel tempo che il satellite fa un giro, il sasso va avanti e dietro nel pozzo (quindi si incontrano alle extremità). Quindi, siccome conosciamo la soluzione dell'equazione del moto delle proiezioni del moto circolare uniforme, conosciamo anche quella del problema del pozzo.

Questo ragionamento può estendersi anche al caso della molla e del pendolo, anche se in questi due casi non esiste un vero moto circolare di cui essi sono proiezione (soprattutto nel caso del pendolo e in altri casi in cui ad oscillare non sar'ˇna coordinata spaziale, ma un'altra grandezza fisica). Possiamo comunque pensare ad un moto circolare immaginario. L'importante è che conosciamo la generica soluzione funzionale, che come abbiamo visto è una funzione seno o coseno (le moto circolare, la x è descritta dal seno, la y dal coseno, ma questo dipende solo dalla particolare scelta di $t = 0$, come abbiamo già discusso e come rivedremo).

Comunque, in virtù di questa osservazione, possiamo riscrivere la (242) nella generica

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\, t^2} = -\omega^2\, z\,. \tag{243}$$

[Check dimensionale su ω: i due termini della (243) devono essere omogenei e quindi, avendo il termine a sinistra le dimensioni di z diviso un tempo al quadrato, ω deve avere le dimensioni dell'inverso del tempo (ovvero espresso in s^{-1} nel SI).]

Confrontando con la (140) otteniamo direttamente la generica soluzione, che riscriviamo per comodità:

$$z(t) = A\,\cos(\omega t + \phi) \tag{244}$$

Si tratta solo di capire quanto valgono le costanti A e ϕ che compaiono nella (244): essendo due incognite abbiamo bisogno di due *condizioni* (lèggi 'equazioni'): in genere $z(t=0)$ e $\dot{z}(t=0)$, ovvero coordinata e velocità iniziali.

$$z(t=0) = A\,\cos\phi \tag{245}$$
$$\dot{z}(t=0) = -A\,\omega\,\sin\phi\,. \tag{246}$$

Se scegliamo, per comodità, $t=0$ nella posizione in cui z ha il valore massimo e quindi la velocità è nulla, otteniamo semplicemente

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_{max} & = & A\,\cos\phi \\ 0 & = & -A\,\omega\,\sin\phi \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} \phi & = & 0 \\ A & = & z_{max} \end{array}\right. \tag{247}$$

ovvero

$$z(t) = z_{max}\,\cos(\omega\,t) \tag{248}$$
$$\dot{z}(t)\,[=v_z(t)] = -\omega z_{max}\,\sin(\omega\,t) \tag{249}$$

ove

- z_{max} sta, nei tre problemi, per: scostamento massimo del pesetto dalla posizione di equilibrio della molla; raggio della Terra; angolo massimo del pendolo;
- mentre ω vale, rispettivamente per i tre problemi, $\sqrt{k/m}$ $\sqrt{g/R_T}$ e $\sqrt{g/l}$.
- Ne segue che il periodo T vale nei tre problemi rispettivamente $2\pi\,\sqrt{\frac{m}{k}}$, $2\pi\,\sqrt{\frac{R_T}{g}}$ e $2\pi\,\sqrt{\frac{l}{g}}$

Significato di ω: in questi problemi <u>non</u> è una vera velocità angolare: nei primi due problemi non ci sono angoli; nel terzo c'è un angolo, θ, la velocità angolare associata al quale vale però $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = -\omega\,\theta_{max}\sin(\omega\,t)$. Il nome generale di ω, comunque legato a periodo e frequenza ma non strettamente legato ad angoli fisici, è **pulsazione**.

Oscillatore armonico: si intende moto sinusoidale e si ha luogo ogni qual volta è soddisfatta la (243). Si noti come nel secondo e terzo caso il periodo non dipende dalla massa (solita storia di massa inerziale e gravitazionale che si semplificano). Si noti inoltre come nei tre problemi il periodo non dipende dall'ampiezza dell'oscillazione. [Si ricordi nel caso del pendolo l'isocronismo è solo approssimativo e dipende dalla validità dell'approssimazione $\sin\theta \approx \theta$, valida per $\theta \lesssim 0.1$ (vedi sul sito del corso come risolvere numericamente il problema della dipendenza del periodo da θ). . Si noti inoltre come la formula $T = 2\pi/\sqrt{R_T/g}$ potrebbe trarre in inganno e far pensare che il periodo dipenda da R_T: ma in realtà qui R_T non sta ad indicare la posizione iniziale nel pozzo, ma g/R_T era soltanto un trucco per indicare in modo più semplice la combinazione $G\,M_T/R_T$.]

14.2

Problemini:

1. Un molla si allunga di 10 cm se si applica una foeza di 10 N. Calcolare la costante elastica della molla e il periodo di oscillazione se ad essa si appende una massa di 1 kg.

2. Assumendo che l'oscillazione massima del problema precedente sia di 2 cm, calcolare la velocità massima dell'oggetto appeso alla molla.

3. Calcolare il periodo di oscillazione del problema del sasso nel pozzo per il centro della Terra e la velocità massima del sasso.

4. Un pendolo ha periodo di un secondo. Si immagini di trasportarlo su un altro pianeta avente stesso raggio della Terra e densità dimezzata. Trovare il periodo del pendolo su tale pianeta.

14.3

Avevamo visto: impulso della forza ↔ variazione quantità di moto. Vediamo più in generale la variazione di quantità di moto di due corpi interagenti.
Principio di azione e reazione (terzo principio della meccanica): forze uguali e contrarie:

$$\vec{F}_A^{(B)} \;=\; -\vec{F}_B^{(A)}\,, \tag{250}$$

ove $\vec{F}_A^{(B)}$ sta per "forza su A dovuta a B", e analogo per $\vec{F}_B^{(A)}$. Analizziamo le variazioni di quantità di moto di A e B:

$$\Delta\vec{p}_A^{(B)}\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A^{(B)}(t)\mathrm{d}t \tag{251}$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B^{(A)}(t)\mathrm{d}t \tag{252}$$

$$= -\Delta\vec{p}_B^{(A)}\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{253}$$

ovvero

$$\Delta\vec{p}_A^{(B)}\Big|_{t_1}^{t_2} + \Delta\vec{p}_B^{(A)}\Big|_{t_1}^{t_2} = 0\,. \tag{254}$$

In una interazione fra due corpi la quantità di moto viene scambiata da un corpo all'altro. Se il sistema fisico è formato soltanto da due corpi (ovvero essi non hanno, almeno approssimativamente, interazioni con il resto del mondo), la loro *quantità di moto totale si conserva*.
Si noti come l'espressione di sopra sia in effetti vettoriale: la conservazione si applica alle tre componenti: se le interazioni con 'il resto del mondo' avviene soltanto in una o due delle componenti, la conservazione vale nelle rimanenti. Si noti inoltre come, per arrivare all'espressione di conservazione si è assunto che il principio di azione e reazione valga istante per istante.

Quantità di moto del cannoncino:

- posto su piano senza attrito, e coordinata x orizzontale, positiva nella direzione di moto del proiettile:
  - lungo x i due oggetti sono soggetti soltanto alla loro forza reciproca: $\rightarrow$ sistema isolato $\rightarrow$ p_x si conserva (chiamiamolo semplicemente p). Essendo proiettile e cannone inizialmente fermi

$$p_1 + p_2 = 0 \tag{255}$$

$$p_2 = -p_1 \tag{256}$$

$$M\,v_2 = -m\,v_1 \tag{257}$$

$$v_2 = -\frac{m}{M}\,v_1 \tag{258}$$

  - lungo la componente verticale la risultante delle forze è nulla: il moto di proiettile e cannoncino si mantiene sull'asse x.

- ancorato saldamente al terreno: in pratica il cannoncino è solidale con il terreno e quindi, con buona approssimazione, con la Terra (a meno che l'esplosione sia talmente potente da sollevare la piattaforma sulla quale il connoncino era ancorato. . .): in pratica si considera che cannoncino e Terra formino un solo corpo di massa 'infinita' rispetto al proiettile: $m/M \rightarrow 0$: il cannoncino non si sposta (ma il sistema cannoncino-Terra acquista la quantità di moto $-m\,v_1$: un oggetto di massa 'infinita' può variare la sua quantità di moto senza (apprezzabilmente) variare la sua velocità.
  Esempio di persona che saltella: la Terra varia continuamente la propria quantità di moto senza subire spostamenti.

Conservazione della quantità di moto: caso generale.
Se abbiamo un sistema isolato di oggetti, ovvero tali che essi interagiscono solo con gli altri oggetti di tale sistema, ma non con il resto del mondo, per ogni intervallo di tempo dt possiamo estendere la (254) a tutte le coppie ij, ovvero

$$\mathrm{d}\vec{p}_i^{(j)} + \mathrm{d}\vec{p}_j^{(i)} = 0\,. \tag{259}$$

Ne risulta che, istante per istante, è nulla la variazione della quantità di moto totale del sistema $\mathrm{d}\vec{p} = \sum_{i,j}\mathrm{d}\vec{p}_i^{(j)}$.

Sistema isolato:

$$\rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{p} = 0 \tag{260}$$

$$\rightarrow \quad \vec{p}(t) = \textit{costante.} \tag{261}$$

(262)

Altri esempi: persona inizialmente ferma su laghetto ghiacciato che riesce a muoversi lanciando un oggetto; razzo nel vuoto che accelera 'spruzzando' del gas (o altro) ad alta velocità; Terra che 'assorbe' le variazioni di quantità di moto di quanti saltellano sulla terra.

14.3.1

Centro di massa del sistema (media pesata delle posizioni):

$$x_{CM}(t) \;=\; \frac{\sum_i m_i x_i(t)}{\sum_i m_i} \tag{263}$$

$$v_{x_{CM}}(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}x_{CM}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{264}$$

$$= \frac{\sum_i m_i\,\mathrm{d}x_i(t)/\mathrm{d}t}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i v_{x_i}(t)}{\sum_i m_i} = \frac{p_{x_{tot}}(t)}{M_{tot}} \tag{265}$$

idem per y e z

$$\vec{v}_{CM}(t) = \frac{\vec{p}_{tot}(t)}{M_{tot}}\,. \tag{266}$$

Sistema isolato: $\vec{p}_{tot}$ costante: $\rightarrow \vec{v}_{CM}$ costante.

Esempi: urto auto ($m_1 = 1000\,\mathrm{kg}$) e camion ($m_1 = 10000\,\mathrm{kg}$), trascurando attriti ed assumendo rimangano attaccati: casi $v_1 = 50\,\mathrm{km/h}$ e $v_2 = 0$ e velocità scambiate: $\rightarrow \Delta v$ per i due mezzi nei due casi (ma nota: le forze che subiscono le persone dipendono da accelerazioni, $\Delta v/\Delta t$: importanza di 'attutire' l'urto, ovvero aumentare Δt).

14.4

Definizione del **lavoro** in caso *unidimensionale* e per forza costante: $L = F\,\Delta s$ ("forza per spostamento"). Lavoro nel caso di forza che dipende dalla posizione: $L = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n F_i \Delta_{x_i}$ e limite ($n \rightarrow \infty$; $\Delta_{x_i} \rightarrow 0$):

$$L|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{267}$$

Definizione dell'energia cinetica e connessione al lavoro mediante il cosiddetto teorema dell'energia cinetica (o delle 'forze vive'), consequenza di "$F = m\,a$":

$$\begin{aligned}
L|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{x_1}^{x_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x && (268)\\
&= \int_{x_1}^{x_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,v\,\mathrm{d}t && (269)\\
&= \int_{x_1}^{x_2} m\,v\,\mathrm{d}v && (270)\\
&= \frac{1}{2}\,m\,v^2\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}\,m\,v^2(x_2) - \frac{1}{2}\,m\,v^2(x_1) && (271)\\
&= E_c(x_2) - E_c(x_1)\,, && (272)
\end{aligned}$$

avendo definito $E_c = 1/2\,mv^2$ come **energia cinetica**:

$$\rightarrow \quad L|_{x_1}^{x_2} = \Delta E_c|_{x_1}^{x_2}\,. \tag{273}$$

Unità di misura del lavoro e dell'energia: Joule = Newton×m, simbolo J. Ne segue: $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$.

14.5

Esempio 1: lavoro della forza di richiamo dell'oscillatore armonico:

- dalla posizione di equilibrio ($x = 0$) alla generica posizione x:

$$\begin{aligned} L|_0^x &= \int_0^x F(x')\,\mathrm{d}x' = \int_0^x (-k\,x')\,\mathrm{d}x' & (274) \\ &= -\frac{1}{2}\,k\,x^2 & (275) \end{aligned}$$

  → lavoro negativo (indipendentemente dal segno di x — quello che conta è che forza e spostamento siano discordi): $\Delta E_c < 0$: velocità diminuisce:

$$\frac{1}{2}m\,v^2(x) = \frac{1}{2}m\,v^2(0) - \frac{1}{2}\,k\,x^2\,; \qquad (276)$$

- dalla generica posizione x alla posizione di equilibrio ($x = 0$):

$$\begin{aligned} L|_x^0 &= \int_x^0 (-k\,x')\,\mathrm{d}x' & (277) \\ &= \frac{1}{2}\,k\,x^2 & (278) \end{aligned}$$

  → lavoro positivo (indipendentemente dal segno di x — quello che conta è che forza e spostamento siano concordi): $\Delta E_c < 0$: velocità aumenta:

$$\frac{1}{2}m\,v^2(0) = \frac{1}{2}m\,v^2(x) + \frac{1}{2}\,k\,x^2\,; \qquad (279)$$

- in particolare, dalla posizione iniziale x_M, nella quale la massa m ha velocità nulla, fino a $x = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\,v^2(0) &= \frac{1}{2}\,k\,x_M^2 & (280) \\ &= \frac{1}{2}\,\omega^2\,m\,x_M^2 & (281) \\ v(0) &= \omega\,x_M\,, & (282) \end{aligned}$$

  [ritroviamo lo stesso risultato trovato dalla cinematica, ovvero da $x(t) = x_M\,\cos(\omega\,t)$].

Si noti inoltre come la somma del lavoro per andare da 0 a x e di quello per andare da x a 0 sia nulla: $L|_0^x + L|_x^0 = 0$.

Esempio 2: lavoro della forza di gravità in prossimità della superficie terrestre, ovvero '$-mg$', con g approssimativamente costante, da una quota iniziale z_1 ad una quota finale z_2

$$\begin{aligned} L|_{z_1}^{z_2} &= \int_{z_1}^{z_2} (-m\,g)\,\mathrm{d}z & (283)\\ &= -m\,g\,(z_2 - z_1) & (284)\end{aligned}$$

Se $z_2 > z_1$ (il corpo è salito): $L = -m\,g\,h < 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c < 0$.
Se $z_2 < z_1$ (il corpo è disceso): $L = m\,g\,h > 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c > 0$.
(h, definito positivo, è la differenza di quota dal punto più alto al punto più basso.) Anche in questo caso, se il corpo ritorna nella posizione iniziale il lavoro totale è nullo.

Esempio 3: lavoro della forza di attrito mentre il corpo si sposta da x_1 a $x_2 > x_1$ (indicando con d la distanza fra i due punti):

$$\begin{aligned} L|_{x_1}^{x_2} &= \int_{x_1}^{x_2} (-\mu_D\,F_N)\,\mathrm{d}x & (285)\\ &= -\mu_D\,F_N\,(x_2 - x_1) = -\mu_D\,F_N\,d & (286)\\ (&= -\mu_D\,m\,g\,d\;,\;\text{caso particolare}\;)\,. & (287)\end{aligned}$$

Se invertiamo il verso del moto anche la forza cambia segno ($F = -\mu_D\,F_N\,\hat{v}$):

$$\begin{aligned} L|_{x_2}^{x_1} &= \int_{x_2}^{x_1} (\mu_D\,F_N)\,\mathrm{d}x & (288)\\ &= \mu_D\,F_N\,(x_1 - x_2) & (289)\\ &= -\mu_D\,F_N\,(x_2 - x_1)\;: & (290)\end{aligned}$$

Lavoro sempre negativo: $L|_{x_1}^{x_2} = -\mu_D\,F_N\,d$ se si va da x_1 a x_2 e poi si ritorna a x_1 si sommano i lavori negativi: $\rightarrow L_{tot} = -2, \mu_D\,F_N\,d$.

$\rightarrow$ Discussione sui vantaggi di usare il lavoro invece di risolvere in dettaglio le equazioni del moto.

14.6

Problemi (quando è possibile fare uso di lavoro, energia cinetica, impulso e quantità di moto: evitando pura cinematica):

1. corpo cade da 10 m: $\rightarrow$ velocità finale;
2. corpo lanciato verso l'alto con $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$: a che altezza arriva?
3. corpo lanciato verso l'alto con $v_0 = 30\,\mathrm{m/s}$: velocità quando è salito di 10 dalla posizione iniziale.
4. Un corpo si massa 100 g, sospeso ad una molla, compie oscillazioni di ampiezza 2 cm con un periodo di $0.1\,\mathrm{s}$. Calcolare la velocità massima del corpo durante le oscillazioni.
5. Un corpo è frenato dalla sola forza di attrito dinamico che agisce fra esso e un piano orizzontale. Sapendo che inizialmente aveva una velocità di $10\,\mathrm{m/s}$ e che è frenato in 5 m si determini il coefficiente di attrito.
6. Calcolare il lavoro effettuato dalla forza elastica di una molla in un periodo completo in un periodo completo.
7. Un corpo di massa $100\,\mathrm{g}$ scende lungo un piano inclinato di $\alpha = 20\,^o$. Sapendo che il coeffciente di attrito dinamico corpo-piano vale $\mu_d = 0.1$ e che lo spazio percorso lungo il piano vale 2 m, determinare:
   (a) lavoro effettuato dalla forza peso;
   (b) lavoro effettuato dalla forza di attrito;
   (c) lavoro totale;
   (d) velocità finale, sapendo che esso era inizialmente fermo.
8. Su un corpo si massa 1 kg agisce una forza di intensità variabile con la posizione secondo la legge $F(x) = \alpha + \beta x^2$, con $\alpha = -5\,\mathrm{N}$ e $\beta = 2\,\mathrm{N/m}$. Calcolare il lavoro della forza nel tratto da $x = 1\,m$ a $x = 3\,\mathrm{m}$.
9. Su una barretta di peso trascurabile e lunghezza 1 m sono fissate due pesetti agli estremi e uno al centro. Quello al centro ha massa 1 kg e quelli agli estremi 2 kg e 3 kg. Trovare il centro di massa del sistema. (Per fare i conti, si immagini la barretta lungo l'asse x, con la massa di 2 kg in $x = 0$, etc.)

10. Un oggetto di massa 5 kg viaggia a 20 m/s verso un altro oggetto di massa 1 kg inizialmente (il moto si svolge su un piano orizzontale privo di attrito).

    (a) Determinare la velocità del centro di massa e la quantità di moto totale del sistema.

    (b) Sapendo che dopo l'urto i due corpi rimangono attaccati, determinare la loro velocità finale.

11. Seguito del problema precedente. Successivamente essi salgono su un piano inclinato privo di attrito che forma un angolo di 10^o rispetto al piano orizzontale:

    (a) Determinare il lavoro effettuato dalla (componente lungo il piano inclinato della) forza peso fino al momento in cui il sistema si arresta.

    (b) Determinare lo spazio percorso lungo il piano inclinato fino all'arresto.

    (c) Determinare a che altezza arrivano rispetto al piano orizzontale.

    [Per risolvere il problema fare uso dei concetti di lavoro ed energia cinetica. Niente dettagli cinematici e niente energia potenziale (per chi la conosce già).]

12. Idem del problema precedente, ma con piano scabro e coefficiente di attrito dinamico di $\mu_d = 0.2$.

13. Ancora sull'ultimissimo problema. Dopo che il sistema si è fermato riscende: calcolare velocità quando torna sul piano orizzontale. [Sempre usando solo lavoro ed energia cinetica.]

15 lunedi 3/4, 15:00–17:00

15.1

Sistema di punti materiali interagenti e soggetti a forze reciproche (**interne**) ed **esterne**:

$$\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_i^{(j)} + \vec{F}_i^{(ext)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_i \,. \tag{291}$$

Sommando su tutti i punti materiali otteniamo

$$\sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i \tag{292}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sum_i \vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,j} \vec{F}_i^{(j)} + \sum_i \vec{F}_i^{(ext)}\,, \tag{293}$$

ma, per il principio di azione-reazione, le forze interne si annullano a coppie nella sommatoria in quanto $F_i^{(j)} = -F_j^{(i)}$. La variazione nel tempo della quantità di moto totale del sistema è dovuta soltanto alle forze esterne:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext)} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} \tag{294}$$

$$\vec{F}^{(ext)} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \tag{295}$$

$$= M\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{CM}}{\mathrm{d}t} \tag{296}$$

$$= M\,\vec{a}_{CM}\,, \tag{297}$$

ove $\vec{F}^{(ext)}$ è la *risultante* delle forze esterne e M è la somma delle masse del sistema. È come se il CM si comportasse come un punto materiale di massa M (seconda legge della meccanica generalizzata ad un sistema di punti materiali). Segue:

$$L^{(ext)} = \int_A^B F^{(ext)} \cdot \mathrm{d}x = \Delta\left(\frac{1}{2} M v_{CM}^2\right)\Bigg|_A^B : \tag{298}$$

il lavoro fatto dalla risultante delle forze esterne è pari alla variazione di *energia cinetica di traslazione* del CM (nota: il sistema possiede anche energia cinetica dovuta al movimento interno).

15.2

Ancora sulla definizione di lavoro:
Esempio 4: lavoro della forza di gravità, caso generale, da una distanza iniziale R_1 and una distanza finale R_2:

$$L|_{R_1}^{R_2} = \int_{R_1}^{R_2} (-\frac{G\,M\,m}{r^2})\,\mathrm{d}r \tag{299}$$

$$= \left. \frac{G\,M\,m}{r} \right|_{R_1}^{R_2} \qquad (300)$$

$$= G\,M\,m \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) : \qquad (301)$$

Se $R_2 > R_1$ (m si allontana da M): $L < 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c < 0$.
Se $R_2 < R_1$ (m si avvicina a M): $L > 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c < 0$.
Anche in questo caso, se il corpo ritorna nella posizione iniziale il lavoro totale è nullo.
Lavoro fatto dalla forza gravitazionale per portare un corpo dalla distanza R all'infinito:

$$L|_R^\infty = -\frac{G\,M\,m}{R} \,. \qquad (302)$$

Se $R = R_T$ questa formula si riduce a $-m\,g\,R_T$.
Problema (velocità di fuga): quanto deve valere v_0 sulla superficie terrestre affinché, in assenza di resistenza dell'aria, un corpo lanciato verso l'alto possa arrivare a 'distanza infinita' con 'velocità nulla'? [R.: $E_c(R = R_T) = 1/2\,m\,v_0^2$, $E_c(R = \infty) = 0$: $\rightarrow$ calcolare ΔE_c ed eguagliarlo con il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale: $\rightarrow$ conti]

Problemi:

1. velocità di fuga dalla Terra e dalla Luna.

2. velocità di impatto: si immagini che un oggetto si trovi in quiete 'molto lontano' dalla Terra e che venga poi 'catturato' dalla forza di gravit` terrestre: con quale velocità cade sulla Terra (si trascuri la solita resistenza dell'aria).

15.3

Lavoro in 3D: somma dei lavori delle componenti:

$$\mathrm{d}L = \mathrm{d}L^{(x)} + \mathrm{d}L^{(y)} + \mathrm{d}L^{(y)} = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z \,. \qquad (303)$$

- **Prodotto scalare**: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\theta$ ("prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo fra essi compreso").
  Può essere visto come prodotto modulo per proiezione: $a \cdot (b \cos\alpha)$, ovvero $b \cdot (a \cos\alpha)$. Commuta, ovvero $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. Prodotto scalare di un vettore con

se stesso: $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$. Vettori ortogonali: prodotto scalare nullo. Applicazione ai 'versori' [$\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$,$\hat{k} = (0, 0, 1)$]: $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$; $\hat{i}\cdot\hat{j} = 0$, etc.. Proprietà distributiva: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
Dalla definizione e dalle proprietà segue:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \;=\; (a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}) = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z\,, \tag{304}$$

mediante la quale è possibile calcolarsi il prodotto scalare dalle componenti. Dalla definizione di prodotto scalare e dalla sua valutazione dalle componenti segue

$$a\,b\,\cos\theta = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z\,, \tag{305}$$

da cui è possibile calcolarsi θ note le componenti dei vettori.

Tornando al lavoro, si riconosce quindi in $F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$ il prodotto scalare $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$

15.4

In alcuni tipi di forze (molla, gravità, elettrostatica) il lavoro compiuto su un ciclo è nullo. Inoltre, in questi casi si osserva come l'energia cinetica 'sparisca' e poi 'ricompaia' (esempio: lancio di oggetto verso l'alto) in virtù della relazione $L|_{x_1}^{x_2} = \Delta E_c|_{x_1}^{x_2}$. Si ipotizza quindi, per questo tipo di forze, che quando l'energia cinetica 'sparice' (o semplicemente diminuice), essa si trasformi in un altro tipo di energia *meccanica*: **energia potenziale**:

diminuzione di energia cinetica $\rightarrow$ aumento di energia potenziale

(e viceversa)

$$\Delta E_c|_{x_1}^{x_2} = -\,\Delta E_p|_{x_1}^{x_2} \quad\Rightarrow\quad \Delta E_p|_{x_1}^{x_2} = -\,L|_{x_1}^{x_2}\,. \tag{306}$$

La (306) definisce (a meno di una costante) l'energia potenziale. Nota: sia per l'energia cinetica che per l'energia potenziale il lavoro fornisce la variazione dell'energia, ma, mentre per l'energia cinetica esiste uno 'zero naturale', corrispondente ad una velocità nulla, nell'energia potenziale tale 'zero naturale' non sempre

esiste. In genere, dato un problema è conveniente fissare lo zero dell'energia potenziale in posizione del suo minimo (in quel problema).
Esempio 1 (molla)

$$\begin{aligned}\Delta E_p|_0^x &= -\,L|_0^x = \frac{1}{2}\,k\,x^2 &(307)\\ E_p(x=0)=0 \;\;\Rightarrow\;\; E_p(x) &= \frac{1}{2}\,k\,x^2\,. &(308)\end{aligned}$$

Esempio 2 (forza di gravità "-mg"). Se il moto dell'oggetto si svolge da un livello minimo (es. tavolo, pavimento, piano stradale, etc.), conviene prendere tale livello come riferimento per lo zero dell'energia potenziale:

$$\begin{aligned}\Delta E_p|_0^h &= -\,L|_0^h = m\,g\,h &(309)\\ E_p(h=0)=0 \;\;\Rightarrow\;\; E_p(h) &= m\,g\,h\,. &(310)\end{aligned}$$

Esempio 3 (forza di gravità, caso generale).

$$\Delta E_p|_{R_0}^R = G\,M\,m\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R}\right)\,. \qquad (311)$$

Non si può scegliere $R_0 = 0$, in quanto $\Delta E_p|_{R_0}^R \to \infty\ \forall R$. Si potrebbe scegliere R_0 uguale al raggio del pianeta. Si preferisce scegliere lo zero in corrispondenza di $R_0 \to \infty$, ovvero in corrispondenza del suo massimo (idem per forza di Coulomb):

$$E_p(R=\infty)=0 \;\;\Rightarrow\;\; E_p(R) = -\frac{G\,M\,m}{R}\ : \qquad (312)$$

niente di veramente strano: quello che conta è che, passando da R_1 a R_2 con $R_2 > R_1$, si abbia $E_p(R_2) > E_p(R_1)$:

$$\begin{aligned}\Delta E_p|_{R_1}^{R_2} &= E_p(R_2) - E_p(R_1) &(313)\\ &= -\frac{G\,M\,m}{R_2} - \left(-\frac{G\,M\,m}{R_2}\right) &(314)\\ &= G\,M\,m\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\,. &(315)\end{aligned}$$

Esempio: Calcolo della velocità di fuga:

$$\begin{aligned}E_p(R_T)+E_c(R_T) &= E_p(\infty)+E_c(\infty) &(316)\\ -\frac{G\,M\,m}{R_T}+\frac{1}{2}\,m\,v^2 &= 0+0 &(317)\\ \to\ \ v &= \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R_T}} = \sqrt{2\,g\,R_T}\,. &(318)\end{aligned}$$

[Si noti come questa velocità sia $\sqrt{2}$ volte (ovvero +40%) quella per tenere un satellite in orbita radente sulla superficie terrestre.]

15.5

Problemi:

1. Risolvere il problema nr. 1 della lezione (p. 66) scorsa usando energia cinetica e potenziale.
2. Risolvere il problema nr. 2 della lezione (p. 66) scorsa usando energia cinetica e potenziale.
3. Risolvere il problema nr. 3 della lezione (p. 66) scorsa usando energia cinetica e potenziale.
4. Risolvere il problema nr. 4 della lezione (p. 66) scorsa usando energia cinetica e potenziale.
5. Date le due forze, espresse in N, $F_1 = \{1, -3, 5\}$ e $F_2 = \{2, 1, -1\}$, trovare: l'angolo fra di esse; la risultante; l'angolo di ciascuna di esse rispetto alla risultante.
6. Le componenti di due vettori (nel piano xy) sono $(1, 3)$ e $(5, -1)$: trovare l'angolo fra i due vettori.
7. Un corpo si sposta dalla posizione lungo l'asse x dal punto $x_1 = 5\,\mathrm{m}$ a $x_2 = 2\,\mathrm{m}$ (ovvero le altre coordinate rimangono invariate). Sapendo che in tale tratto il corpo è soggetto alla forza costante $\vec{F} = (-2,\, 4,\, -5)\,\mathrm{N}$, determinare il lavoro compiuto da tale forza.
8. Sul problema precedente: dire se il corpo è soggetto anche ad altre forze.
9. Un corpo si sposta nel piano xy da $\vec{r}_1 = (1,\, 2)\,\mathrm{m}$ a $\vec{r}_2 = (3,\, -1)\,\mathrm{m}$. Agisce la forza di intensità dipendente dalla posizione $\vec{F} = (1/x,\, 2\,y)\,\mathrm{N}$, calcolare il lavoro compiuto dalla forza.
10. Un oggetto scivola (senza ruotare!) lungo un piano inclinato con privo di attrito e, arrivato sul piano orizzontale, raggiunge la velocità di $10\,\mathrm{m/s}$. Calcolare la quota dalla quale l'oggetto era partito.
11. Sull'esercizio precedente: sapendo che il coefficiente di attrito del piano orizzontale vale 0.3 calcolare lo spazio percorso dall'oggetto prima di arrestarsi.

16 Giovedi 6/4, 18:00–19:00

16.1

Lavoro eseguito dalle diverse forze che agiscono su uno stesso punto materiale. Se $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$, ne segue

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L &= \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = (\sum_i \vec{F}_i) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{s} && (319) \\ &= \sum_i \mathrm{d}L_i \ : && (320) \end{aligned}$$

il lavoro totale è pari alla seoma del lavoro effettuato dalle varie componenti. Esempio: in un piano inclinato con attrito, possiamo parlare di lavoro effettuato dalla forza peso e quello effettuato dalla forza di attrito. La somma dei due contributi dà il lavoro totale.

16.2

Lavoro positivo, negativo o nullo, a seconda dell'angolo formato fra forza e spostamento elementare, e quindi fra forza e velocità, ovvero fra accelerazione e velocità. Caso particolare

$$\begin{aligned} L = 0 \ &\Rightarrow \ \vec{F} \perp \mathrm{d}\vec{s} && (321) \\ &\Rightarrow \ \vec{F} \perp \vec{v} && (322) \\ &\Rightarrow \ \vec{a} \perp \vec{v}\,. && (323) \end{aligned}$$

Caso del moto circolare, per ogni $\mathrm{d}t$:

- Forza (centripeta) radiale, mentre $ds = \vec{v}\,\mathrm{d}t$ tangenziale: $\alpha = \pi/2 \rightarrow \cos\alpha = 0 \rightarrow L = 0$;
- In dettaglio:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L(t) &= F_x v_x \mathrm{d}t + F_y v_y \mathrm{d}t && (324) \\ &= [(-m\omega^2 R\cos\omega t)\cdot(-\omega R\sin\omega t) \\ &\quad +(-m\omega^2 R\sin\omega t)\cdot(\omega R\cos\omega t)]\,\mathrm{d}t = 0\,. && (325) \end{aligned}$$

Questo è il motivo per cui nel moto circolare uniforme la velocità si mantiene costante pur essendoci una forza: istante per istante il lavoro totale è nulla in quanto un contributo di un segno dovuto ad una componente è compensato da un contributo di segno opposto dovuto all'altra componente.

Altro caso importante: reazioni vincolari normali alla velocità (ad esempio guide, binari, etc.): la forza del vincolo è, punto per punto, sempre ortogonale al vettore velocità: il vettore $\vec{v}$ cambia direzione e verso, ma non il modulo.

16.3

Campi conservativi: caso generale 3-D: il lavoro non dipende dal percorso: $\rightarrow$ energia potenziale dipende solo dalla posizione e non dal percorso e dalla 'storia' precedente. Esempio: piano inclinato (schematizzato da triangolo ABC, con $\overline{AB} = h$, $\overline{AC} = d$ e $\overline{BC} = b$):

i) $A \rightarrow B + A \rightarrow B$: $\Rightarrow mgh + 0 = mgh$;

ii) $A \rightarrow C$ considerando componente forza di gravità lungo AC: $\Rightarrow mg \sin(\alpha)\, d$, ovvero mgh, in quanto $d = h/\sin\alpha$;

ii) $A \rightarrow C$ considerando $\vec{F} \cdot \vec{\Delta s} = F\, d\, \cos\theta$, con $\theta = \pi/2 - \alpha$, ovvero $\cos\theta = \sin\alpha$: $\Rightarrow$ ancora mgh.

Caso generale: traiettoria a zigzag o curva qualsiasi dalla quota z_1 alla quota z_2: conta la proiezione lungo la verticale: lavoro non dipende dal percorso effettuato ma sono dalla quota. Se si fa un percorso chiuso, tornando allo stesso punto di partenza, il lavoro totale è nullo. Queste proprietà possono essere prese come definizione di campo conservativo.

16.4

Riassumiamo le diverse espressioni dell'energia potenziale incontrate, scrivendo anche lo zero di riferimento:

forza $-mg$	$E_p(h) = mgh$	$E_p = 0$ per $h = 0$ (h positivo verso l'alto)
molla	$E_p(x) = \frac{1}{2}\, k\, x^2$	$E_p = 0$ per $x = 0$
gravità (caso generale)	$E_p(x) = -\frac{GMm}{R}$	$E_p = 0$ per $R = \infty$

Si noti come quest'ultima definizione (valida ad ogni distanza $R \geq R_T$)[8] è compatibile con $E_p(h) = m\,g\,h$, se si pensa che quest'ultima sia valida in prossimità della superficie terrestre, ove le varizioni di g con l'altezza sono trascurabili. Espansione[9] di $E_p(R)$ intorno a R_T:

$$
\begin{aligned}
E_p(R_T+h) &= -\frac{GMm}{R_T+h} && (326)\\
&= -\frac{GMm}{R_T(1+h/R_T)} \times \frac{1-h/R_T}{1-h/R_T} && (327)\\
&= -\frac{GMm(1-h/R_T)}{R_T(1-(h/R_T)^2)} && (328)\\
&\approx -\frac{GMm(1-h/R_T)}{R_T} = -\frac{GMm}{R_T} + \frac{GMm}{R_T^2}\,h && (329)\\
&\approx E_p(R_T) + mgh && (330)\\
&\approx E_p(R_T) + \left.E_p\right|_{R_T}(h)\,, && (331)
\end{aligned}
$$

avendo chiamato $E_p|_{R_T}(h) = mgh$ il potenziale rispetto a R_T e avendo trascurato $(h/R_T)^2$ nel passaggio dalla (328) alla (329)

16.5

Espressione della forza dalla funzione energia potenziale. Essendo

$$E_p(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\,\mathrm{d}x + \text{costante}\,,$$

segue

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} \qquad (332)$$

[8]Per $R < R_T$ abbiamo visto come la forza cresce con R e quindi abbiamo un'espressione dell'energia potenziale simile a quella della molla:

$$E_p(R) = \frac{1}{2}\,\frac{mg}{R_T}\,R^2 \qquad (R < R_T)\,.$$

[9]Si ricorda, a proposito, che se $\epsilon \ll 1$ allora: $1/(1+\epsilon) \approx 1-\epsilon$; $(1+\epsilon)^2 \approx 1+2\epsilon$; $\sqrt{(1+\epsilon)} \approx 1+\epsilon/2$.

Si può verificare facilmente come, nei tre casi incontrati, dall'espressione dell'energia potenziale si riottiene la forza:

$$E_p(h) = mgh \quad \Rightarrow \quad F(h) = -\frac{\mathrm{d}E_p(h)}{\mathrm{d}h} = -mg \tag{333}$$

$$E_p(x) = \frac{1}{2}\, k\, x^2 \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} = -kx \tag{334}$$

$$E_p(R) = -\frac{GMm}{R} \quad \Rightarrow \quad F(R) = -\frac{\mathrm{d}E_p(R)}{\mathrm{d}R} = -\frac{GMm}{R^2} \tag{335}$$

16.6

Riepilogo su lavoro e bilancio energia potenziale e potenziale:

- <u>Tutte le forze</u> $\rightarrow$ $L_{tot}|_A^B = \Delta E_c|_A^B$, ove il pedice *tot* indica che si tratta del lavoro fatto dalla risultante di tutte le forze che agiscono sul corpo, conservative o non.
- <u>Forze conservative</u> $\rightarrow$ $L_{F^{(i)}_{cons}}\Big|_A^B = -\,\Delta E_p^{(i)}\Big|_A^B$, ove l'indice i indica che la relazione è valida per ciascuna delle forze conservative in gioco
- Se sono presenti solo <u>forze conservative</u>: si conserva l'energia meccanica totale: $E_c + E_p = costante$:

$$E_c(in) + E_p(in) \;\; = \;\; E_c(fin) + E_p(fin)\,, \tag{336}$$

  in quanto $E_c(fin) - E_c(in) = -[E_p(fin) - E_p(in)]$, ovvero $\Delta E_c = -\Delta E_p$.

17 Venerdi 7/4, 14:00–16:00

17.1

Ancora studio della curva E_p. Caso unidimensionale (x è la generica variabile e non rappresenta necessariamente la coordinata spaziale 'x'): $F = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$. Grafici per potenziali mgz, $1/2\, kx^2$ e $-GMm/r$. Punti di **equilibrio** (forza si annulla, ovvero $\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$ si annulla): stabile, instabile o indifferente, a seconda del verso della forza quando ci si sposta dalla posizione di equilibrio. Equilibrio stabile o instabile: minimo o massimo (locali) di $\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$; derivata seconda positiva o negativa.

Analogia montagne russe. Livello di energia totale e valutazione grafica della regione accessibile al movimento del corpo e del bilancio energia potenziale e cinetica (barriera di potenziale e buca di potenziale).

17.2

Problema delle tre cariche ai vertici di triangolo equilatero.

17.3

Problema del 'giro della morte' partendo da un piano inclinato: da quale altezza bisogna partire? ($h > 5/2\, R$)
Ricorgiamo che la condizione di contatto nel punto più alto equivale a $v \geq \sqrt{g\, R}$.
(Osservazione su ragionamenti dimensionali.)

17.4

Variazione sul tema: partenza da piano orizzontale: corpo 'sparato da molla di costante k. Quanto bisogna contrarre la molla? ($x = \sqrt{5mgR/k}$)
Variante della variazione sul tema: prima di arrivare alla guida verticale percorre una distanza d su piano orizzontale con attrito dinamico μ_d. Quanto bisogna contrarre la molla? Ragionamento a step: 1) energia potenziale della molla; 2) energia cinetica del corpo quan do lascia la molla; 3) energia cinetica alla base della guida, diminuita, rispetto a quella iniziale, del lavoro fatto dalla forza di attrito; 4) Energia cinetica ed energia potenziale nel punto più alto.

$$\frac{1}{2}\, k\, x^2 - \mu_d\, m\, g\, d \quad = \quad m\, g\, (2R) + \frac{1}{2}\, m\, v^2 \tag{337}$$

$$\geq \quad m\, g\, (2R) + \frac{1}{2}\, m\, g\, R \tag{338}$$

Un modo alternativo per ottenere lo stesso risultato è di calcolare il lavoro totale svolto dalle diverse forze in gioco ed eguagliarlo alla variazione di energia cinetica:

$$L(\text{molla})|_x^0 + L(\text{attrito})|_0^d + L(\text{gravità})|_{h=0}^{h=2R} \quad = \quad \Delta E_c \tag{339}$$

$$\frac{1}{2}\, k\, x^2 - \mu_d\, m\, g\, d - m\, g\, (2R) \quad = \quad \frac{1}{2}\, m\, v^2 - 0 \tag{340}$$

17.5

Esercitazioni (seconda ora)

18 Giovedi 20/4, 18:00–19:00

18.1

Unità di misura di lavoro ed energia: Joule (J): 1 Joule = 1 N × 1 m; J ↔ $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$.

18.2

Forze non conservative e trasformazione in calore dell'energia meccanica: esempi, incluso esperimento storico del mulinello di Joule (Inizio $E_c = 0$, $E_p = mgh$; fine: $E_c \approx 0$, $E_p = 0 \rightarrow$ l'acqua del mulinello si è scaldata ed, in particolare, l'incremento di temperatura è proporzionale al lavoro meccanico eseguito:

$$\Delta T \quad \propto \quad L\,. \tag{341}$$

[Nota: potremmo usare tale esperimento per definire il grado, ad es. come "differenza di temperatura in un kg di acqua quando questa viene scaldata con 1 Joule di energia", o qualcosa del genere, ma storicamente le cose sono andate diversamente.).]

18.3

Temperatura e **calore**: dal livello percezionale/intuitivo alle definizioni operative. Cominciamo con la temperatura:

- Il concetto fisico di temperatura è un raffinamento della nostra percezione sensoriale del caldo e del freddo.
- Le percezioni possono essere ingannevoli, in quanto noi siamo sensibili alla rapidità con cui assorbiamo o emettiamo calore attraverso la pelle: oggetti (verificabili strumentalmente) alla stessa temperatura ci appaiono più o meno caldi a seconda di quanto trasmettono il calore (es metalli o marmo rispetto a legno, plastica o polistirolo; gli oggetti metallici ci sembrano freddi degli altri quando sono a temperatura inferiore alla nostra temperatura corporea, ma a temperatura superiore ci sembrano più caldi, vedi es. in sauna). Famoso è il 'chilly factor' che dà la temperatura ambiente 'percepita' e che dipende da umidità e velocità del vento.
- I termometri sono basati sull'osservazione che alcuni corpi cambiano qualche loro proprietà al variare della temperatura, ad esempio i metalli variano le

loro dimensioni, componenti elettrici possono cambiare corrente o tensione, etc. Il caso più famoso è quello del mercurio, che ha una forte espansione termica.

- Per definire la scala termometrica è importante avere dei riferimenti. Si potrebbe usare un termometro di riferimento (in analogia al campione di kg), ma la scala oltre che arbitraria (e in principio non ci sarebbe niente di male) è difficilmente riproducibile.
  Osservazione della stabilità della temperatura in coincidenza con i cambiamenti di fase (ghiaccio $\rightarrow$ acqua; ebollizione). Il caso dell'acqua è particolarmente comodo in quando le temperature di interesse sono tipiche dell'esperienza quotidiana. Scala centigrada (quella usuale). Assunzione di linearità dell'innalzamento della colonnina di mercurio; cenno ai problemi per estendere la scala termometrica a basse ($\ll 0^o$ C) o alte ($\gg 100\,^o$C) temperature. (Per ora, per quello che ci interessa, assumiamo l'esistenza di termometri opportunamente tarati).

- Alla base delle misure termometriche e degli scambi di calore c'è il **principio zero della termodinamica**: due corpi messi a contatto raggiungono la stessa temperatura (si termalizzano).

- Per misurare la temperatura di un corpo dobbiamo mettere in contatto con esso il termometro ed attendere lo stabilizzarsi della temperatura (tipicamente, se il corpo è 'grande' il termometro raggiungerà la temperatura del corpo, ma in generale termometro e corpo raggiungeranno una temperatura comune di equilibrio – vedi nel seguito).

- Proprietà transitiva: se il termometro in equilibrio prima con A e poi con B e all'equilibrio misuriamo lo stesso valore di temperatura, diremo che A e B sono alla stessa temperatura (e quindi in equibrio termico), anche se alle nostre sensazioni uno dei due sembra più freddo dell'altro.

Passiamo adesso al calore, cominciando, anche in questo caso, con osservazioni vaghe.

- Originariamnte il concetto di calore è legato a quello di sorgente di calore, tipicamente fuoco o raggi solari.

- Questa entità, ancora da definire operativamente, è quella che scalda i corpi, ovvero provoca variazioni di temperatura.

- è un dato di fatto che esistono sorgenti di calore più o meno 'potenti' (nel senso colloquiale del termine, per ora), ovvero capaci di scaldare più o meno rapidamente i corpi (ovvero di 'fornire più o meno calore nell'unità di tempo').

- A parità di sorgente di calore, l'innalzamento di temperatura dipende dal tempo di funzionamento (a parte quando la temperatura è in corrispondenza delle transizioni di fase, ma questa è un'altra storia).

- La stessa sorgente di calore, tenuta in funzione lo stesso tempo, scalda diversamente sostanze diverse e , a parità di sostanza, scalda diversamente diverse quantità di quella sostanza (es. pentolino o pentolone d'acqua su fornello domestico):

$$\Delta T \propto Q \tag{342}$$

$$\Delta T \propto \frac{Q}{M} \tag{343}$$

$$\Delta T = \frac{Q}{c\,M}\,, \tag{344}$$

  ove M è la massa del corpo, Q è la quantità di calore e c, legato al coefficiente di proporzionalità della (343), è il *calore specifico*, una proprietà del corpo che dipende anche dalla temperatura, e quindi andrebbe scritto come $c(T)$ e quindi la (344) andrebbe riscritta come

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}Q/(c(T)\,M)\,. \tag{345}$$

- Scrivedo il fattore di proporzionalità della (342) come $1/C$, definiamo la *capacità termica* C come

$$C = \frac{Q}{\Delta T}\ : \tag{346}$$

  minore è lo sbalzo termico ΔT a parità di calore assorbito, maggiore è la capacità termica del corpo. Analogia di capacità volumetriche assumendo recipienti circolare di diversa sezione: il recipiente più capiente è quello in cui il livello del liquido si innanza di meno a parità di liquido introdotto. Ovviamente $C = c\,M$ e $c = C/m$.

- Definizione della *caloria* (cal): "quantità di calore per innalzare la temperatura di 1 g di acqua di un grado intorno a 15 ^{o}C" (ovvero da 14.5 ^{o}C a

15.5 ^{o}C). *Caloria* (kcal = 1000 cal): idem per 1 kg di acqua. Nota: il valore di riferimento per definire la caloria è dovuto al fatto che c dipende dalla temperatura (piccola dipendenza, trascurabile per molte applicazioni pratiche e per i problemi didattici).

- Notiamo dalla (344) come tale definizione di caloria implica anche aver assunto unitario il calore specifico dell'acqua intorno a 15 ^{o}C, infatti

$$1\,^o\mathrm{C} \;=\; \frac{1\,\mathrm{cal}}{c_{H_2O}(15^o\mathrm{C})\,1\,\mathrm{g}} \qquad (347)$$

  implica $c_{H_2O}(15^o\mathrm{C}) = 1\,\mathrm{cal}/(\mathrm{g}\,^o\mathrm{C}) = 1\,\mathrm{kcal}/(\mathrm{kg}\,^o\mathrm{C})$.
  Si noti come la capacità termica è misurata in cal/^{o}C.

18.4

Scambio termico fra corpi (che formano un sistema termicamente isolato) a temperature iniziali diverse che raggiungono l'equilibrio termico (es. due liquidi non reagenti miscelati in un thermos). Siano M_1, c_1 e T_1 massa, calore specifico e temperatura iniziale del primo corpo; M_2, c_2 e T_2, idem per il secondo.

- Principio zero della termodinamica: i due corpi raggiungeranno una temperatura di equilibrio T_e.

- In assenza di sorgenti termiche, se un corpo si scalda, assorbendo calore. vuol dire che l'altro lo ha ceduto:

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= 0 && (348)\\ C_1\Delta T_1 + C_2\Delta T_2 &= 0 && (349)\\ c_1M_1\Delta T_1 + c_2M_2\Delta T_2 &= 0 && (350)\\ c_1M_1(T_e - T_1) + c_2M_2(T_e - T_2) &= 0\,, && (351)\end{aligned}$$

  da cui

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{c_1M_1T_1 + c_2M_2T_2}{c_1M_1 + c_2M_2} && (352)\\ &= \frac{C_1T_1 + C_2T_2}{C_1 + C_2}\,. && (353)\end{aligned}$$

La temperatura di equilibrio è pari alla media delle temperature iniziali pesate con le capacità termiche (e ovviamente la formula si può estendere all'equilibrio simultaneo fra n corpi, sempre non reagenti chimicamente). Esempi: corpo in mare; normale termometro a mercurio che 'misura' la temperatura di una goccia di acqua.

Un caso di interesse sia didattico che pratico è quando un recipiente entra nello scambio termico (ad esempio si aggiunge acqua calda ad acqua fredda contenuta in una tazza). Indicando con Q_0 la quantità di calore scambiata dal recipiente, inizialmente alla temperatura T_1, abbiamo:

$$Q_0 + Q_1 + Q_2 = 0 \qquad (354)$$

$$C_0 \Delta T_1 + C_1 \Delta T_1 + C_2 \Delta T_2 = 0 \qquad (355)$$

$$(C_0 + C_1)\,(T_e - T_1) + C_2(T_e - T_2) = 0\,, \qquad (356)$$

da cui

$$T_e = \frac{(C_0 + C_1)T_1 + C_2 T_2}{(C_0 + C_1) + C_2} = \frac{(C_0 + C_1)T_1 + C_2 T_2}{C_0 + C_1 + C_2}\,. \qquad (357)$$

In sostanza, per tornare al nostro esempio, tazza ed acqua alla stessa temperatura iniziale si comportano come un unico corpo che ha capacità termica pari alla somma delle due capacità termiche. A volte si parla di 'equivalente in acqua' di un recipiente, ovvero si considera una massa di acqua di capacità termica pare alla capacità termica del recipiente.

18.5

Problemi

1. Si hanno 50 litri di acqua a 80 gradi. Quant'acqua fredda (15 gradi) bisogna aggiungere per ottenere una temperatura di equilibrio di 35 ^{o}C?

2. 100 g di alluminio a 80 gradi sono immersi in 200 g di acqua a 20 gradi: trovare temperatura di equilibrio.

3. Un oggetto di 100 g è estratto dall'acqua in ebollizione e raffreddato in 200 g di acqua inizialmente a 20 gradi. Sapendo che la temperatura di equilibrio dell'oggetto e dell'acqua è 24.5 gradi, calcolare il calore specifico dell'oggetto sia in cal/g ^{o}C che in J/kg ^{o}C.

4. Una tazza (cilindrica) di diametro di 8 cm e altezza 7 cm viene riempita con acqua a 15 gradi e poi posta in un forno a microonde da 800 W. Quanto bisognerà attendere affinché l'acqua raggiunga una temperatura di 90 ^{o}C.

5. Una caraffa contiene un litro di acqua a 20 ^{o}C. Successivamente vengono aggiunti 100 cm^3 di acqua a 100 ^{o}C. Sapendo che inizialmente caraffa e acqua erano in equilibrio termico e che la temperatura finale di equilibrio è pari a 25 ^{o}C, calcolare la capacità termica della caraffa (si trascurino gli scambi termici con l'ambiente).

19 Venerdi 21/4, 14:00–16:00

19.1

Le relazioni (341) e (342) sono fondamentali per arrivare ad un concetto generale di energia. L e Q producono, a parità di sostanza e di massa, la stessa variazione di temperatura.

Torniamo all'esperimento di Joule: quanto scalda un Joule di lavoro? Empiricamente, 1 J = 1/4.184 cal, ovvero 1 cal = 4.184 J, o 1 kcal = 4.184 kJ,
Esempio: mulinello di Joule contenente 100 g di acqua a 20 ^{o}C, attivato da un peso da 50 kg che scende di 10 M. Lavoro compiuto dalla forza peso: $mgh = 4900$ J $\rightarrow$ 1171 cal $\rightarrow \Delta T = 11.7\,^o$C, ovvero temperatura finale di 31.7 ^{o}C.

19.2

Conservazione dell'energia, caso generale. Se solo forze conservative si conserva energia meccanica (cinetica + potenziale). Altrimenti l'energia meccanica che sparisce si trasforma in energia termica: $\rightarrow$ l'energia dell'acqua dell'esempio precedente è aumentata di 4900 J: quantità di calore $\Leftrightarrow$ variazione di energia interna del sistema [questa osservazion è valida per corpi che (praticamente) non si espandono con la temperatura e rappresenta un primo passo verso il 'primo principio della termodinamica'].

19.3

Come è noto, ci sono altre forme di energia, la più famosa delle quali è quella elettrica, ottenuta tipicamente convertendo energia meccanica attraverso oppor-

tune turbine ('grosse dinamo'). È anche noto che l'energia elettrica può essere convertita in calore, ad es. nelle stufette elettriche. Anche senza conoscere i dettagli di come l'energia è prodotta, dobbiamo essere in grado di confrontare diverse quantità di energia e saperne calcolare gli effetti termici.
Prima di fare delle applicazioni, introduciamo il concetto di **potenza**, anch'esso un ben preciso concetto fisico mutuato dall'analogo concetto intuitivo: persona/macchina/processo più potente di un altro se riesce a fare più 'lavoro' a parità di tempo. Potenza: $P = L/\Delta t \rightarrow \mathrm{d}L/\mathrm{d}t$: Watt(W): J/s.
Esempio: 1 kg cade da 1 m. Lavoro compiuto dalla forza di gravità: 9.8 J. Se il processo si ripete una volta al secondo (ad esempio da un rubinetto esce un litro di acqua al secondo) $P = L/\Delta t = 9.8\,\mathrm{J}/1\,\mathrm{s} = 9.8\,\mathrm{W}$: questa potenza può essere convertita (eventualmente con qualche perdita dovuta al processo di trasformazione) in potenza elettrica.
Esempio: potenza di una centrale idroelettrica:

$$P = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mgh)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,gh\,, \qquad (358)$$

ove $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ è pari al flusso di acqua (in massa, ovvero in kg/s).
Esempio numerico con dati reali (centrale ENEL della diga sul Tevere di Castel Giubileo, 29/4/05, ore 9:30):

- volume di acqua convogliata alle turbine: 180 m^3/s;
- dislivello: 7 m;
- potenza elettrica generata: 12 MW

dai quali ricaviamo $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = 180000\,\mathrm{kg/s}$, da cui $P = 1.80\,10^3\,\mathrm{kg/s} \times 9.8\,\mathrm{m/s^2} \times 7\,\mathrm{m} = 1.2\,10^7\,\mathrm{W} = 12\,\mathrm{MW}$, in accordo con il dato avuto dalla centrale (vuol dire che, a parte arrotondamenti e approssimazioni, l'efficienza di conversione da potenza meccanica a potenza termica è molto elevato[10]).
Esempio: Uno scaldabagno della potenza di 1000 W funziona per 10 minuti: calcolare la quantità di calore assorbita dall'acqua. $E = P\,\Delta t = 1000\,\mathrm{W} \times 600\,\mathrm{s} = 600000\,\mathrm{J}$, $\rightarrow$ 143 kcal, le quali possono scaldare 70 litri di acqua di circa due gradi.

[10] In realtà, ho scoperto successivamente che chi mi aveva fornito queste informazioni mi aveva 'imbrogliato', in quanto il flusso non è misurato direttamente, ma ottenuto da da dislivello e potenza elettrica. È comunque vero che le centrali idroelettriche hanno efficienze elevatissime.

19.4

Potenza, forza e velocità:

$$P = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}\,. \tag{359}$$

Esempio: auto che avanza a 40 km/h costanti impiegando una potenza di 5 kw: calcolare forza del motore e coefficiente β della forza di resistenza dell'aria (assunta dipendere linearmente dalla velocità). Chiamando F_a quella che spinge l'auto e F_R la forze di resistenza del mezzo:

$$v = cost \;\Rightarrow\; a = 0 \;\Rightarrow\; F_{tot} = 0 \tag{360}$$

$$\Rightarrow\; F_a + F_R = 0 \tag{361}$$

$$F_a = \beta v \tag{362}$$

$$P = \beta v^2 \tag{363}$$

$$\beta = \frac{P}{v^2} = 40.5\,\frac{\mathrm{N}}{(\mathrm{m/s})} = 40.5\ (\mathrm{kg/s}) \tag{364}$$

$$F_a = 450\,\mathrm{N}\ \ (\approx 45\,\mathrm{kg}_p) \tag{365}$$

Dalla (363) impariamo come la potenza necessaria per raggiungere una verta velocità va come il quadrato della velocità (finché la resistenza del mezzo cresce linearmente con la velocità, ma questo è vero solo a basse velocità: ad alte velocità la resistenza cresce rapidamente al variare della velocità ed è noto che per aumentare di poco la velocità massima bisogna aumentare di molto la potenza, oltre che cercare di ridurre β, legata al famoso 'Cx' delle auto).
Breve discussione sul significato del grafici delle riviste di auto/moto (vedi Quattroruote) che riportano potenza e 'coppia' in funzione del 'numero di giri' (rpm): se la coppia è costante, essendo la coppia legata alla forza che spinge la macchina, la potenza cresce linearmente con il 'numero di giri'.

La (359) ci offre un altro modo per spiegare la ragione per la quale quando, istante per istante, la forza è ortogonale alla velocità, allora la forza non compie lavoro:

$$\vec{F} \perp \vec{v} \;\Rightarrow\; P = 0 \;\Rightarrow\; L = 0\,. \tag{366}$$

19.5

Alcune unità di misura di energia e di potenza e applicazioni tipiche nella vita quotidiana (auto, caldaie, condizionatori, etc.).

Energia	
Unità	Conversione
cal 1	1 cal = 4.184 Joule
(kcal	1 kcal = 1000 cal = 4184 Joule)
kwh	1 kwh = 1 kw $\times$ 1 h = $3.6\,10^6$ Joule
Btu	1 Btu = 1055 Joule
eV $^{(*)}$	1 eV = $q_e \times 1\,\mathrm{V}$= $1.6\,10^{-19}$ Joule
Potenza	
Unità	Conversione
HP (CV)	1 HP = 736 Watt
kcal/h	1 kcal/h = 1.16 Watt
Btu/h	1 Btu/h = 0.293 Watt

$^{(*)}$ 'Elettronvolt' (Il Volt sarà visto nel seguito)

Esempio: quanto vale la potenza termica dissipata da una persona? Assumiamo che 'bruci' 2000 kcal/giorno, calcoliamo la potenza media nell'arco della giornata:

$$P \;=\; \frac{2000\,\mathrm{kcal}\times 10^3\,\mathrm{cal/kcal}\times 4.184\,\mathrm{J/cal}}{24\,\mathrm{h}\times 3600\,\mathrm{s/h}} = 97\,\mathrm{W}\,. \tag{367}$$

Ovviamente essa è diversa nelle diverse ore del giorno (quando si dorme si consuma poco, quando si corre moltissimo). Come ordine di grandezza, possiamo prendere 200 W/persona in stato di normale attenzione.
Problemini associati: quanto scaldano 200 persone in un cinema? (dipende se il film è noioso o se è un thriller!). Se l'ambiente è molto piccolo (la dissipazione naturale è bassa, nei cinema moderni capita!), quanto deve essere potente l'impianto di condizionamento (misurato in Btu/h)?

19.6

Torniamo ad energia potenziale e forze.
In generale $E_p(\vec{r})$. Componenti della forza: $F_x = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$, $F_y = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}y$, $F_z = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}z$ e $F_r = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}r$ (quando la forza ha una simmetria radiale la forza radiale è di maggior interesse delle componenti cartesiane della forza). Esempio gravitazionale (conti lasciati come esercizio)::

$$E_p(\vec{r}) \;=\; -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{368}$$

$$
\begin{aligned}
F_r &= -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = -\frac{GMm}{r^2} &(369)\\
F_x &= -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -\frac{GMm}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\,x = -\frac{GMm}{r^3}\,x &(370)\\
F_y &= -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}y} = -\frac{GMm}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\,y = -\frac{GMm}{r^3}\,y &(371)\\
F_z &= -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = -\frac{GMm}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\,z = -\frac{GMm}{r^3}\,z &(372)
\end{aligned}
$$

Dalle (370)-(372) otteniamo

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= -\frac{GMm}{r^3}\,\vec{r} &(373)\\
&= -\frac{GMm}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} &(374)\\
&= -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{r} &(375)
\end{aligned}
$$

in quanto, per definizione, il versore $\hat{r}$ è pari a vettore $\vec{r}$ diviso il suo modulo. Ovviamente le (373) e (375) sono assolutamente equivalenti e il cubo al denominatore nella (373) non deve trarre in inganno.

19.7

Ovviamente anche la forza elettrostatica ('di Coulomb') può essere scritta in modo analogo:

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{k_0\,Q\,q}{r^3}\,\vec{r} &(376)\\
&= \frac{k_0\,Q\,q}{r^2}\,\hat{r}\,. &(377)
\end{aligned}
$$

(Si ricorda che $k_0 = 9\times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$.)
Lavoro compiuto dalla forza di Coulomb: analogo di quanto visto a proposito della forza gravitazionale. Energia potenziale (con riferimento rispetto $E_p(\infty)=0$):

$$
E_p = \frac{k_0\,Q\,q}{r} \qquad (378)
$$

Grafici di E_p nei casi $Q\,q>0$ e $Q\,q<0$ (quest'ultimo ha stessa forma di quello gravitazionale; il primo è invece ribaltato rispetto all'asse r). Esempio dell'avvicinamento di due nuclei 'sparati' a grande velocità: barriera di potenziale (e importanza nella fusione nucleare controllata).

19.8

Problemi

1. Scaldabagno da 80 litri, potenza 1000 W: quanto impiega a scaldare l'acqua da 20 ^{o}C a 60 ^{o}?

2. Per riscaldare un corpo da 10 a 20 gradi sono necessari 1000 J, calcolare la capacità termica del corpo sia in J/^{o}C che in cal/^{o}C [nota: data l'equivalenza fra Joule e calorie, capacità termiche e calori specifici possono essere espressi sia facendo riferimento ai Joule che alle calorie].

3. Il calore specifico dell'alluminio vale 0.21 cal/g ^{o}C. Calcolarne il valore in J/kg ^{o}C.

4. Si immege un blocco di alluminio, di massa 100 g ed inizialmente a 80 gradi in 200 g di acqua inizialmente a 20 gradi. Si calcoli la temperatura finale di equilibrio (si trascuri il contributo del recipiente allo scambio termico).

5. Risolvere il problema precedente assumendo che il recipiente dell'acqua abbia una capacità termica di 50 cal.

6. Si vuole condizionare un piccolo locale in cui ci sono dei computer e accessori che consumano in totale 2000 W. Calcolare la potenza del condizionatore in Btu

7. Cosa si modifica la soluzione del problema precedente se consideriamo che nel locale ci lavorano 5 persone?

8. Fare i conti dettagliati del primo esempio del par. 19.5 e risolvere i problemini che lo segue.

9. Calcolare la potenza in MW di una macchina da corsa da 900 HP.

10. Una caldaia ha una potenza termica di 20000 kcal/h. Calcolare quanto vale il flusso massimo di acqua (in litri/minuto) a 50 gradi che essa riesce a fornire se l'acqua che entra nella caldaia ha una temperatura di 15 gradi.

20 Lunedi 24/4, 15:00–17:00

20.1

Esercitazioni

21 Giovedi 27/4, 18:00–19:00

21.1

Potenziale elettrostatico: "energia potenziale per unità di carica", ovvero

$$V = \frac{k_0\,Q}{r} \tag{379}$$

Comodo in quanto, se si conosce la differenza di potenziale fra due punti, $\Delta V_{AB} = V_B - V_A$, si calcola facilmente variazione di energia potenziale e quindi lavoro compiuto dalla forza elettrostatica quando una carica q è spostata dal punto A al punto B:

$$\Delta E_p|_A^B = q\,\Delta V_{AB} = -\,L|_A^B \tag{380}$$

(Nota: se da A a B il potenziale decresce, ovvero $\Delta V_{AB} < 0$ la forza elettrostatica compie lavoro positivo, ricordare analogia gravitazionale). Unità di misura del potenziale elettrostatico: Volt (V): 1 Joule = 1 Volt × 1 Coulomb

Campo elettrico 'generato' da una carica puntiforme: forza per unità di carica. Linee di forza e significato di campo vettoriale. Unità di misura del campo elettrico (N/C, o più comunemente V/m).

21.2

Riepilogo forza gravitazionale e coulombiana:

	Gravità	Coulomb
F	$-\frac{G\,M\,m}{r^2}$	$\frac{k_0\,Q\,q}{r^2}$
$\vec{F}$	$-\frac{G\,M\,m\,\vec{r}}{r^3}$	$\frac{k_0\,Q\,q\,\vec{r}}{r^3}$
campo	$\vec{g} = -\frac{G\,M\,\vec{r}}{r^3}$	$\vec{E} = \frac{k_0\,Q\,\vec{r}}{r^3}$
E_p	$-\frac{G\,M\,m}{r}$	$\frac{k_0\,Q\,q}{r}$
potenziale	$-\frac{G\,M}{r}$	$V = \frac{k_0\,Q}{r}$

Si noti che, essendo il campo elettrico pari alla forza elettrica per unità di carica ed essendo il potenziale elettrico pari all'energia potenziale per unià di carica, campo e potenziale elettrici sono legati dalle stesse relazioni che legano forza e potenziale elettrici:

$$\Delta E_p|_A^B = -\int_A^B \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s} \iff \Delta V|_A^B = -\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}, \tag{381}$$

che diventano, se forza o campo elettrico sono <u>costanti</u>

$$\Delta E_p|_A^B = -F\cdot \Delta s \iff \Delta V|_A^B = -E\cdot \Delta s\,. \tag{382}$$

Analogalmente, il campo elettrico può essere ottenuto come derivata della funzione potenziale

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} \iff E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \tag{383}$$

(etc. per le altre componenti) (384)

che in caso di forza o campo uniforme in Δx diventano

$$F_x = -\frac{\Delta\,E_p}{\Delta\,x} \iff E_x = -\frac{\Delta\,V}{\Delta\,x} \tag{385}$$

21.3

Problemi

1. Sapendo che lungo la coordinata x il campo elettrico è costante e che in $x_1 = 1\,\mathrm{m}$ il potenziale vale 100 V e che in $x_2 = 2\,\mathrm{m}$ vale -100 V, calcolare modulo e verso del campo elettrico.

2. Si sa che in una certa regione di spazio il campo elettrico è costante, diretto verso l'alto (ovvero lungo z) e di intensità 100 V/m. Calcolare la differenza di potenziale fra la quota $z_1 = 10\,\mathrm{cm}$ e $z_1 = 50\,\mathrm{cm}$

3. Sul problema precedente: trovare l'espressione del potenziale in funzione di z, avendo assunto $V(z = 0) = 0$.

4. Una particelle carica positiva di $+10^{-8}\,\mathrm{C}$ si sposta da un punto di potenziale 100 V ad un punto di potenziale 10 V. Calcolare la variazione di energia cinetica del corpo. Sapendo inoltre che la particella era inizialmente ferma e che raggiunge una velocità finale di 10000 m/s, calcolare la massa della particella.

5. Calcolare la differenza di potenziale richiesta per portare un elettrone ad una velocità pari ad un decimo della velocità della luce ($q_e = -1.6 \times 10^{-19}\mathrm{C}$, $m_e = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $c = 299792458\,\mathrm{m/s}$).

6. Un elettronvolt (simbolo 'eV') è definito come l'energia che un elettrone acquista quando attraversa una differenza di potenziale di 1 V. Trovare il fattore di conversione elettronvolt $\rightarrow$ Joule. Trovare la velocità di un elettrone di 1 eV.

7. Sapendo che un protone ha una massa di $1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, trovare la velocità di un protone di 1 eV.

8. Sapendo che un protone ha la stessa carica di un elettrone, ma di segno apposto, calcolare quanto vale la velocità di un protone che, partendo da fermo, attraversa una differenza di potenziale di 1 milione di Volt.

9. Calcolare la forza e l'energia potenziale di due protoni distanti 1 mm, 1 μm e 1 nm.

10. Si immaginino due protoni vincolati a muoversi sull'asse x e che, partendo da distanze 'molto grandi' ('∞') e con la stessa velocità iniziale, si vanno incontro. Sapendo che ciascuno di essi aveva un'energia iniziale di 1 MeV (10^6 eV) si determini la distanza minima alla quale essi si accicineranno prima di essere ritornare indietro.

22 Lunedi 28/4, 14:00–16:00

22.1

Forza elettrostatica e campo elettrostatico dovuto a molte cariche:

$$\vec{F}_q(r) = \sum_i F_q^{Q_i}(r) = \sum_i \frac{k_0\, Q_i\, q}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\,(\vec{r}-\vec{r}_i) \tag{386}$$

$$\vec{E}(r) = \sum_i E_i(r) = \sum_i \frac{k_0\, Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\,(\vec{r}-\vec{r}_i)\,, \tag{387}$$

ove $\vec{r}_i$ è la posizione nello spazio della carica i-ma. Esempio: cariche ai vertici di un triangolo equilatero di lato l $\rightarrow$ calcolare la forza su ciascuna carica dovuta alle altre due.

Ne segue che, essendo l'energia potenziale pari al lavoro totale compiuto da tutte le cariche Q_i per portare q da $\vec{r}$ all'infinito, esso è pari alla somma dei lavori delle forze di ciascuna carica, anche il potenziale è pari alla somma dei potenziali:

$$V(r) = \sum_i V_i(r) = \sum_i \frac{k_0\, Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}\,. \tag{388}$$

Ovviamente, se invece di un certo numero di cariche puntiformi abbiamo una distribuzione di cariche, le somme diventeranno degli integrali (somme su infiniti elementi infinitesini di cariche), ma la sostanza non cambia. Inoltre, in genere nei libri si incontrano diversi parametri su come calcolare campo e potenziale per delle distribuzioni di cariche 'da manuale' (piano, filo, anello, etc.). In questo corso non ci interesseremo di tali argomenti. Ci interesseremo, invece, ad alcuni aspetti dell'elettricità, innanzitutto al fatto che:

- i conduttori, nei quali le cariche elettriche sono libere di muoversi, formano delle superfici equipotenziali (altrimenti le cariche su di essi non sarebbero all'equilibrio);
- esistono opportuni dispositivi, chiamati generatori di tensione, in grado di mantenere una differenza di potenziale costante fra i loro capi;
- i conduttori permettono di 'trasportare' le differenze di potenziale (vedi esperimento in aula con batteria e fili);

- quando una carica q va da un conduttore all'altro, la cui differenza di potenziale vale ΔV, il campo elettrico compie su di essa un lavoro pari a $q\,\Delta V$, indipendentemente dal percorso effettuato (forza conservativa!).

(Vedremo inoltre in seguito resistenze e condensatori.)

22.2 I

ntroduzione ai **problemi di urto**:
Schemi di urto di due oggetti in approssimazione di sistema isolato:

Sempre Si conserva quantità di moto:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \quad = \quad m_1\vec{v'}_1 + m_2\vec{v'}_2 \tag{389}$$

Urti elastici Si conserva anche energia cinetica totale:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \quad = \quad \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \tag{390}$$

Urti anelastici parte dell'energia 'meccanica' (cinetica) è persa: $\rightarrow$ calore, 'etc.'. Nota: gli urti in cui i corpi rimangono attaccati appartengono a questa classe (nel CM energia cinetica sparisce): urti completamente anelastici: particolarmente semplici da trattare.

Esempio: urto (centrale) di due corpi aventi stessa massa, di cui uno in movimento e l'altro a riposo: Le quazioni di conservazione si riducono a

$$v_1 \quad = \quad v_1' + v_2' \tag{391}$$

$$v_1^2 \quad = \quad {v'}_1^2 + {v'}_2^2\,, \tag{392}$$

la cui soluzione è $v_2' = v_1$ e $v_1' = 0$ (oltre a $v_1' = v_1$ e $v_2' = 0$, corrispondente al fatto che in realtà i corpi non si incontrano).

22.3

Urto elastico frontale (unidimensionale).
Riprendiamo le leggi di conservazione (389)-(390) degli urti elastici, riscrivendole nel modo seguente:

$$m_1\,v_1 - m_1\,{v'}_1 \quad = \quad m_2\,{v'}_2 - m_2\,v_2 \tag{393}$$

$$m_1 v_1^2 - m_1 v_1'^2 \quad = \quad m_2 v_2'^2 - m_2 v_2^2\,, \tag{394}$$

ovvero

$$m_1\,(v_1 - {v'}_1) = m_2\,({v'}_2 - v_2) \tag{395}$$
$$m_1\,(v_1^2 - {v'}_1^2) = m_2\,({v'}_2^2 - v_2^2)\,, \tag{396}$$

dalle quali, dividendo membro a membro (la seconda diviso la prima) e ricordandosi che $a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$, si ottiene

$$v_1 + {v'}_1 = v_2 + {v'}_2\,, \tag{397}$$

ovvero

$$v_1 - v_2 = ({v'}_2 - {v'}_1)\,. \tag{398}$$

La (397) ci dice che in un urto elastico frontale la somma della velocità iniziale e finale di una particella è pari alla somma della velocità iniziale e finale dell'altra particella. Più interessante è la 'lettura' della (398): in un urto elastico la velocità relativa fra le due particelle viene invertita (ma resta costante in modulo). Inoltre, da una di queste due e dalla (394) otteniamo un sistema di equazioni lineari, la cui soluzione è:

$${v'}_1 = \frac{2\,m_2\,v_2 + (m_1 - m_2)\,v_1}{m_1 + m_2} \tag{399}$$
$${v'}_2 = \frac{2\,m_1\,v_1 + (m_2 - m_1)\,v_2}{m_1 + m_2} \tag{400}$$

Casi particolari:

$\boxed{v_2 = -v_1}$:

$${v'}_1 = \frac{m_1 - 3\,m_2}{m_1 + m_2}\,v_1 \tag{401}$$
$${v'}_2 = \frac{3\,m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,v_1 \tag{402}$$

Sottocaso interessante:

$\underline{m_1 = m_2}$:

$${v'}_1 = -v_1 \tag{403}$$
$${v'}_2 = v_1 \tag{404}$$

$\rightarrow$ entrambe rimbalzano all'indietro, invertendo il vettore velocità.

$\boxed{v_2 = 0}$:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_1 \tag{405}$$

$$v'_2 = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2}\, v_1 \tag{406}$$

Sottocasi interessanti:

$\underline{m_1 = m_2}$

$$v'_1 = 0 \tag{407}$$

$$v'_2 = v_1 \ : \tag{408}$$

le particelle si scambiano il moto;

$\underline{m_1 \ll m_2}$ (ovvero urto contro un corpo di 'massa infinita')

$$v'_1 = -v_1 \tag{409}$$

$$v'_2 = 0 \ : \tag{410}$$

la particella inizialmente in moto rimbalza; l'altra resta 'praticamente' in quiete (ma ha assorbito una quantità di moto pari a $2m_1v_1$!);

$\underline{m_1 \gg m_2}$ (esempio urto di palla grande contro 'pallino'):

$$v'_1 = v_1 \tag{411}$$

$$v'_2 = 2\, v_1 \ : \tag{412}$$

la palla pesante prosegue praticamente imperturbata, mentre la seconda 'schizza' in avanti con velocità doppia della palla che l'ha colpita.

$\boxed{v_1 = V_1,\ v_2 = -V_2,\ m_1 \gg m_2}$ con V_1 e V_2 definite positive. (Caso fisico: racchetta contro pallina che viaggia in senso opposto)

$$v'_1 = V_1 \tag{413}$$

$$v'_2 = 2\, V_1 + V_2 \ : \tag{414}$$

la pallina rimbalza con una velocità pari alla sua velocità iniziale, aumentata del doppio della velocità della racchetta (ecco perché i tiri al volo contro palla che viene incontro sono particolarmente 'potenti').

Si noti come, in tutti questi casi, la (398) è rispettata. Essa ci permette noltre di ricavarsi la velocità finale senza fare conti. Prendiamo ad esempio l'ultimo caso. La differenza di velocità fra racchetta e palla vale $V_1 - (-V_2) = V_1 + V_2$ e tale sarà la differenza fra la velocità finale della palla e quella della racchetta. Ma, nell'approssimazione di massa infinita della racchetta la velocità di quest'ultima non viene modificata dall'urto (si pensi al caso limite auto-moscerino). Quindi la velocità finale della palla vale $V_1 + (V1 + V_2) = 2V_1 + V_2$.

Urti parzialmente anelastici: una parte dell'energia meccanica viene persa. Esempio: rimbalzi di pallini normali. Misura (indiretta) della frazione di energia persa dalla misura delle quote successive ad ogni rimbalzo (nota: l'inelasticità può dipendere anche dalla velocità di impatto e, quindi, dalla quota iniziale).

Note su conservazione di quantità di moto e 'assorbimento' di quantià di moto da parte di una parete di massa 'infinita' nel caso di urti eleastici e anelastici.

22.4

Supplemento (Non svolto a lezione, ma semplice esercizio sulle trasformazioni di velocità).
Urto elastico fra punti materiali (o urto centrale fra sfere) aventi stessa massa e velocità opposta. Soluzione con argomenti di simmetria: → rimbalzo: le velocità si invertono. Caso di pari massa, ma velocità diverse: analisi nel cenro di massa: → trasformazioni di velocità.
Trasformazione della velocità del punto materiale di massa m da $CM \rightarrow LAB$ e viceversa:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{LAB}(m) &= \vec{v}_{LAB}(CM) + \vec{v}_{CM}(m) & (415) \\ \vec{v} &= \vec{v}_{CM} + \hat{\vec{v}} & (416) \end{aligned}$$

con trasformazione inversa $\hat{\vec{v}} = \vec{v} - \vec{v}_{CM}$, ove, in questo esempio, il simbolo $\hat{\vec{v}}$ indica la velocità nel CM (e non il versore!).
Urto elastico di oggetti di pari massa nel CM e quindi nel LAB (unidimensionale, lungo linea d'urto), di cui il primo con v_1 e il secondo fermo:

$$\begin{aligned} \hat{v}_1 &= v_1 - v_{CM} = v_1 - \frac{v_1}{2} = \frac{v_1}{2} & (417) \\ \hat{v}_2 &= 0 - v_{CM} = -\frac{v_1}{2} & (418) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{v}_1' &= -\frac{v_1}{2} && (419)\\
\hat{v}_2' &= \frac{v_1}{2} && (420)\\
v_1' &= v_{CM} + \hat{v}_1' = \frac{v_1}{2} - \frac{v_1}{2} = 0 && (421)\\
v_2' &= v_{CM} + \hat{v}_2' = \frac{v_1}{2} + \frac{v_1}{2} = v_1 && (422)
\end{aligned}
$$

riottenendo lo stesso risultato visto precedentemente, vedi (407)-(408).

Problemi

1. (Pendolo 'balistico') Un proiettile di massa m e velocità orizzontale v colpisce un oggetto di massa M inizialmente a riposo e sospesa ad un filo inestensibile e senza peso di lunghezza l. Il proiettile rimane attaccato al corpo e l'intero sistema comincia ad oscillare, portandosi nella prima oscillazione ad un angolo α rispetto alla normale. Determinare α conoscendo m, M, l ed v.

2. Un proiettile di 50 g colpisce orizzontalmente un pendolo balistico avente una massa di 50 kg e rimane ad esso legato dopo l'urto. Sapendo che la massa si solleva di 11 cm, determinare la velocità del proiettile.

3. Due corpi aventi stessa massa e stessa velocità (ma ovviamente di verso opposto) si urtano frontalmente. Calcolare le velocità finali dei due corpi assumendo che l'urto sia perfettamente elastico.

4. Inventarsi dei problemi numerici sui vari casi di urti elastici visti sopra.

5. Una pallina cade da 1 metro. Sapendo che nel rimbalzo sul pavimento viene perso il 20% dell'energia meccanica, si determini la velocità immediatamente dopo il rimbalzo.

6. Un oggetto di massa 1 kg urta con velocità 10 m/s un altro oggetto di massa 3 kg. Sapendo che i due corpi rimandono attaccati dopo l'urto e che il moto avviene su un piano, di coefficiente di attrito dinamico 0.2, calcolare la distanza che i due corpi percorrono dopo l'urto prima di arrestarsi.

23 Giovedi 5/5, 18:00–19:00

23.1

Differenza di energia potenziale e differenza di potenziale per forze elettriche. Materiali conduttori, mobilità delle cariche elettriche e superfici equipotenziali (introduzione qualitativa, tanto per convincersi che le superfici equipotenziali esistono e che, tramite conduttori le differenze di potenziale possono essere trasportate in punti diversi).
Generatore: dispositivo in grado di mantenere ai suoi capi una differenza di potenziale (potenziale più alto: 'polo positivo'; potenziale più basso: 'polo negativo'; siccome il potenziale è definito a meno di una costante additiva, si sceglie usualmente lo zero in corrispondenza del polo 'negativo') e di trasportare, al suo interno, delle cariche positive dal polo negativo a quello positivo (lavoro fatto contro la forza del campo elettrico, che invece tende naturalmente a far spostare cariche positive dal potenziale più alto al più basso; tale lavoro richiede una forza all'interno del generatore che lo compie: 'forza elettromotrice'). La differenza di potenziale fra il polo positivo e quello negativo del generatore viene indicato con f (per ricordarsi che si tratta di una forza elettromotrice), ma in pratica si usa anche il generico simbolo V (che però non va inteso come potenziale elettrostatico assoluto).

Se gli estremi del generatore sono connessi fra di loro "si può" registrare uno scorrimento di cariche dal polo positivo al polo negativo, ovvero una corrente elettrica (definita come la quantità di carica che scorre nell'unità di tempo, ovvero $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, la cui intensità è misurata in Ampère, A, corrispondente ad un Coulomb al secondo). Il passaggio o meno di corrente e la sua intensità dipendono dal tipo di materiale: alcuni matriali presentano un piccolo impedimento (**resistenza**) al passaggio di corrente, altri un grande impedimento ed altri ancora non permettono il passaggio delle cariche ('isolanti'). **Legge di Ohm**:

$$I_{A\to B} = \frac{V_A - V_B}{R}\,, \tag{423}$$

ove R è la resistenza elettrica del materiale, misurata in Ohm (Ω, una resistenza di $1\,\Omega$ fa passare un flusso di cariche di $1\,\mathrm{A}$ fra una differenza di potenziale di $1\,\mathrm{V}$). Attenzione al segno: se $V_A - V_B > 0$ la corrente è positiva (ovvero scorre da A a B), altrimenti negativa.
In genere V_A corrisponde al polo positivo e V_B al negativo ed R è la resistenza

globale al passaggio di cariche da un polo all'altro. In questo caso la (423) diventa $I = f/R$, con I positiva.
Si noti come la (423) venga riscritta semplicemente come $I = \Delta V/R$ o semplicemente $I = V/R$.
Nota: dal punto di vista fisico sono gli elettroni a muoversi, ed essi vanno dal polo negativo a quello positivo, ma nello studio dei circuiti si usa semplicemente una corrente convenzionale positiva.
Lavoro compiuto dalla **forza elettromotrice** f per trasportare (all'interno del generatore) un elemento di carica dq dal polo negativo al polo positivo:

$$\mathrm{d}L|_{GEN} = -\,\mathrm{d}L|_{C.E.} = \Delta E_p|_{C.E.} = \mathrm{d}q\,\Delta V = \mathrm{d}q \cdot f\,, \tag{424}$$

ovvero è richieta dal generatore una potenza di

$$P_{GEN} = \frac{\mathrm{d}L_{GEN}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \cdot f = I \cdot f\,. \tag{425}$$

Quando invece le cariche positive si muovono da polo positivo al polo negativo è il campo elettrico a compiere lavoro positivo d$q \cdot f$, a cui corrisponde una potenza $I \cdot f$.
Che fine fa il lavoro compiuto dal campo elettrico? $\rightarrow$ analogia meccanica: impianto di risalita e sciatori che tornano alla posizione di partenza sciando:

$$\mathrm{d}L|_{Motore} = -\,\mathrm{d}L|_{Grav.} = \Delta E_p|_{Grav.} = \mathrm{d}m \cdot (g \cdot h) \tag{426}$$

$$P_M = \frac{\mathrm{d}L_M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \cdot (g \cdot h)\,. \tag{427}$$

Si nota l'analogia fra la (427) e la (425). [Si veda anche il problema della potenza della diga, che dava la (358).] Il lavoro positivo fatto dal campo gravitazionale nel riportare gli sciatori alla base va a finire in calore dalle forze di attrito (momentaneamente esso produce anche energia cinetica, ma alla fine anche questa diventa nulla). Analogalmente, le cariche perdono energia cinetica per attrito e alla fine tutto il lavoro compiuto dal campo elettrico termina in calore, il quale riscalda la resistenza: **effetto Joule**: la potenza $P = I\,f$ finisce finisce in calore. Questa relazione è valida ai capi di ogni 'resistore' (elemento del circuito dodato di resistenza) e, scrivendola, come si usa abitualmente, usando il simbolo V per la differenza di tensione ai capi della resistenza e ricordandoci della legge di Ohm, otteniamo

$$P = I\,V \tag{428}$$

$$= \frac{V}{R} V = \frac{V^2}{R} \tag{429}$$
$$= I\,R\,I = R\,I^2 \,. \tag{430}$$

(Si ricorda che, essendo P una potenza, viene misurata in Watt: $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{V} \times 1\,\mathrm{A}$.)

23.2

Problemini

1. Una carica di $+2\,10^{-10}\,\mathrm{C}$ viene spostata dal punto A al punto B. Sapendo che $V(A) = 2\,\mathrm{V}$ e $V(B) = 5\,\mathrm{V}$, calcolare il lavoro compiuto dal campo elettrico.

2. Sapendo che $V(A) - V(B) = 12\,\mathrm{V}$ e che quando la carica q si sposta da A a B il campo elettrico compie il lavoro di $6\,10^{-12}\,\mathrm{J}$, calcolare il valore di q.

3. Un filo conduttore è percorso da una corrente elettrica di $10\,\mathrm{A}$. Calcolare la carica elettrica che attraversa una sezione del filo in 10 minuti. Sapendo che una carica elementare ha una carica di $1.6\,10^{-19}\,\mathrm{C}$, calcolare il numero di cariche elementari che ha attraversato tale sezione di filo.

4. I poli di un generatore da $4.5\,\mathrm{V}$ sono connessi fra di loro da una resistenza di $100\,\Omega$. Calcolare la corrente corrente elettrica che scorre nella resistenza e la potenza dissipata.

5. Sul problema precedente: assumendo che nel generatore (una batteria) sia accumulata una energia di 3600 J, calcolare per quanto tempo la batteria può alimentare il circuito (si assuma che la tensione rimanga costante finché c'è energia e poi cessi improvvisamente).

6. Una macchinetta di caffè da viaggio è alimentata dalla batteria della macchina ($12\,\mathrm{V}$) ed è in grado di scaldare 100 g di acqua da $20\,^o\mathrm{C}$ a $100\,^o\mathrm{C}$ in cinque minuti. Calcolare: la potenza elettrica erogata dalla resistenza che scalda l'acqua e il valore di tale resistenza.

7. Quanto ci si mette a scaldare la stessa quantità di acqua se la macchinetta viene fatta funzionare a $240\,\mathrm{V}$? (Ammesso che non si rompa...). Nota: si consideri la tensione di $240\,\mathrm{V}$ (che è alternata), come se fosse una semplice

differenza di tensione continua (si può dimostrare che in effetti, ai fini del riscaldamento di una resistenza esse sono equivalenti, ma questo fa al di là di questo corso).

8. Una resistenza di $10\,\Omega$ è percorsa da una corrente di $0.5\,$A. Assumendo che la resistenza pesi $0.1\,$g, il materiale abbia un calore specifico $1/10$ di quello dell'acqua e la resistenza non sia raffreddata, si calcoli quanto tempo impiega la resistenza a raggiungere la temperatura di $250\,^o$C da una temperatura iniziale di $20\,^o$C.

9. Le caratteristiche di una batteria per automobile (12 V) sono "330 A" (la corrente massima in grado di erogare) e "61 A·h" (ovvero riesce a fornire 1 A per 61 ore, o 61 A per 1 ora, etc). Assumendo tali valori e un comportamento ideale della batteria (niente resistenze interne) calcolare la potenza massima che la batteria riesce a fornire e l'energia (chimica) immagazzinata in essa.

24 Venerdi 6/5, 14:00–16:00

Resistenze in serie (ovvero attraversate dalla stessa corrente), ad esempio R_1, R_2 e R_3. Indicando per semplicità V_1, V_2 e V_3 le differenze di potenziale ai capi di ciascuna e con V la la differenza di potenziale ai capi della serie, dalla legge di Ohm abbiamo:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = I\,R_1 + I\,R_2 + I\,R_3 = I\,(R_1 + R_2 + R_3)\,. \qquad (431)$$

Ma, per definizione,la resistenza complessiva delle tre resistenze in serie, indicata con R_s è data da V/I. Otteniamo quindi

$$R_s = \frac{V}{I} = R_1 + R_2 + R_3\,. \qquad (432)$$

Vediamo quindi come più **resistenze in serie** si comportano ai fini della corrente che scorre nel circuito come se ci fosse una sola resistenza R_s, di valore pari alla somma delle resistenze. In generale:

$$R_s = \sum_i R_i\,. \qquad (433)$$

24.1

Se siamo poi interessati a calcolare la tensione ai capi di ciascuna resistenza basterà applicare a ciascuna di esse la legge di Ohm: $V_i = R_i\,I$, etc., ovvero

$$\begin{aligned} V_i &= R_i\,I = R_i\,\frac{V}{R_s} = R_i\,\frac{V}{\sum_i R_i} && (434)\\ &= \frac{R_i}{\sum_i R_i}\,V && (435)\\ \Rightarrow\ V_i^{(serie)} &\propto R_i\ : && (436)\end{aligned}$$

la tensione V ai capi della serie è 'ripartita', fra le varie resistenze, proporzionatamente al valore di ciascuna resistenza: → **partitore** di tensione.
Esempi numerici.
Il modello di partitore di tensione giustifica il fatto che, nei normali circuiti a componenti discreti, i conduttori (fili di collegamenti) sono considerati equipotenziali in quanto la loro resistenza è estremamente minore di quella degli altri componenti e quindi la 'caduta' di potenziale lungo di essi è assolutamente trascurabile rispetto alle altre differenze di potenziale.

24.2

Resistenze in parallelo: stessa tensione V fra i capi delle resistenza, la corrente differisce da resistore a resistore (complementare delle resistenze in serie); la corrente totale si ripartisce nelle varie resistenze (il flusso totale di cariche si deve conservare), ovvero $\sum_i I_i = I$

$$\begin{aligned} V_i &= V && (437)\\ I_i &= \frac{V_i}{R_i} = \frac{V}{R_i} && (438)\\ I &= \sum_i I_i = \sum_i \frac{V}{R_i} = V\,\sum_i \frac{1}{R_i}\,. && (439)\end{aligned}$$

Ma V/I è per definizione la resistenza del sistema di resistenze messe in parallelo, ovvero

$$\begin{aligned} R_p &= \frac{V}{I} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{R_i}} && (440)\\ \frac{1}{R_p} &= \sum_i \frac{1}{R_i}\ : && (441)\end{aligned}$$

La reciproco della resistenza del parallelo è pari alla somma dei reciproci di ciascuna resistenza. Si capisce inoltre che la resistenza del parallelo è inferiore alla resistenza minima. Se si hanno n resistenze uguali R, la resistenza del parallelo vale R/n.
Esempio numerico: generatore da $10\,\mathrm{V}$ e tre resistenze, una da $2\,\Omega$ seguita dal parallelo di $2\,\Omega$ e $3\,\Omega$. $\rightarrow$ Valutazione di resistenza equivalente, intensità di corrente, tensione ai capi di ogni resistenza, corrente e potenza per ogni resistenza, potenza totale.

24.3

Ripartizione della corrente fra i vari resistori di un parallelo:

$$I_i = \frac{V}{R_i} = \frac{R_p\,I}{R_i} = \frac{R_p}{R_i}\,I \tag{442}$$

$$\Rightarrow\ I_i^{(parall.)} \propto \frac{1}{R_i}\ : \tag{443}$$

le correnti sono ripartite in modo inversamente proporzionale alle resistenze. Resistenze in parallelo formano un *partitore di corrente*

24.4

Effetti pratici delle cadute di potenziale lungo i conduttori: dispositivo ad alto assorbimento di potenza alimentato a bassa tensione (es. motorino di avviamento) e trasporto di energia elettrica mediante linee ad alta tensione.

24.5

Resistenza di un conduttore cilindrico omogeneo ($\approx$ filo) di lunghezza l e sezione S (area di base del cilindro di 'altezza' l):

$$R = \frac{\rho\,l}{S}\,, \tag{444}$$

ove ρ è una costante che dipende dai diversi materiali (e un po' dalla temperatura), chiamata resistività. La (444) è nota come seconda legge di Ohm.

24.6

Esempio di circuito un po' piè complesso, con due generatori e tre resistenze. Indicando quattro punti ai vertici di un rettangolo, con A in alto a sinistra e gli altri (B, C e D) in senso orario:

- $R_1 = 45\,\Omega$ fra A e C;
- $R_2 = 10\,\Omega$ fra B e C;
- $R_3 = 10\,\Omega$ fra C e D;
- $f_1 = 2.1\,\mathrm{V}$ fra A e B, orientato verso A [ovvero $V(A) > V(B)$];
- $f_1 = 1.9\,\mathrm{V}$ fra A e D, orientato verso A.

Discussione introduttiva e soluzioni nei casi in cui $f_2 = 0$ o $f_1 = 0$.

24.7

Concetto di maglia e di nodo e leggi (o 'principi') di Kirchhoff dei circuiti elettrici:

1 La somma algebrica delle correnti che entra in un nodo è nulla:

$$\sum_i I_i \;=\; 0\,, \tag{445}$$

ove il segno delle correnti è positivo se le correnti sono entranti nel nodo (dirette verso il nodo) e negativo altrimenti. Alla base di questa legge c'è la conservazione della carica elettrica e quindi, istante per istante, tanta carica arriva in un punto, tanta ne deve uscire (altrimenti si avrebbe un accumulo di carica – si pensi all'analogo idraulico).

2 Se si parte da un punto del circuito e si segue un percorso chiuso per tornare allo stesso punto (ovvero si percorre una "maglia"), si ritorna allo stesso potenziale, ovvero la somma delle cadute di potenziale lungo la maglia è nulla:

$$\sum_i \Delta V_i \;=\; 0\,. \tag{446}$$

24.8

Problemi

1. Tre resistenze, di valore 1, 2 e 3 Ω sono connesse in serie e collegate ad un generatore di tensione di 10 V. Calcolare la corrente che passa nel circuito, la tensione ai capi di ciascuna resistenza e la potenza dissipata da ciascuna di esse.

2. Quattro resistenze uguali, ciascuna da 40 Ω, sono poste sui lati del quadrato ABCD e collegate fra di loro. Calcolare quanto vale la resistenza fra A e C e quella fra A e B.

3. Uno studente misura il valore di una resistenza nominale di 1 MΩ con un 'multimetro' digitale, mantenedo il contatto fra i capi del resistore e i puntali del multimetro mediante la pressione delle dita. Lo strumento misura 700 kΩ. Determinare la resistenza offerta dal corpo dello studente (fra una mano e l'altra) al passaggio della corrente.

4. Una stufetta da 1000 W è alimentata da una batteria di automobile. Determinare la resistenza elettrica della stufetta e l'intensità di corrente erogata dalla batteria.

5. Sul problema precedente. Si immagini che la batteria sia collegata alla batteria mediante una coppia di cavi, ciascuno di lunghezza 2 m, diametro 2 mm e resistività $\rho = 1.7 \times 10^{-8}\,\Omega{\cdot}\mathrm{m}$. Determinare la tensione ai capi della resistenza della stufetta, la potenza elettrica dissipata dalla stufetta e quella dissipata dai cavi.

6. Una corrente di 150 mA viene ripartita da due resistenze. Sapendo che $R_2 = R_1/2$, trovare l'intensità di corrente che attraversa le due resistenze.

7. Sul problema precedente: sapendo inoltre che la tensione ai capi di R_1 ed R_2 vale 5V, trovare quanto valgono R_1 ed R_2.

8. 'Provare' a risolvere (ovvero "trovare tutto") il problema del paragrafo 24.6 [la (446) richiede in effetti qualche ulteriore spiegazione che sarà data nella prossima lezione, ma la sostanza è tutta in quella formula (più concetto di generatore di tensione e legge di Ohm)].

25 Lunedi 8/5, 15:00–17:00

25.1

Riprendiamo la (446) e la applichiamo al circuito del paragrafo 24.6. Dalla $\sum_i \Delta V_i = 0$ otteniamo sulla maglia A-B-C-D-A (si presti attenzione ai segni):

$$\begin{aligned}
(V_B - V_A) + (V_C - V_B) + (V_D - V_C) + (V_A - V_D) &= 0 \qquad (447)\\
-f_1 - (V_B - V_C) - (V_C - V_D) + f_2 &= 0 \qquad (448)\\
-f_1 - R_2\, I_2 - R_3\, I_3 - f_2 - R_3\, I_3 &= 0\,, \qquad (449)
\end{aligned}$$

avendo indicato (arbitrariamente!) I_2 e I_3 positive nel verso di percorrenza della maglia.
Sulla maglia A-C-D-A, con I_1 (ancora arbitrariamente) lungo il verso di percorrenza, si ha

$$\begin{aligned}
(V_C - V_A) + (V_D - V_C) + (V_A - V_D) &= 0 \qquad (450)\\
-(V_A - V_C) - (V_C - V_D) + f_2 &= 0 \qquad (451)\\
-R_1\, I_1 - R_3\, I_3 + f_2 &= 0\,. \qquad (452)
\end{aligned}$$

Infine, sulla maglia A-B-C-A (con i versi delle correnti fissati dalle convenzioni precedenti):

$$\begin{aligned}
(V_B - V_A) + (V_C - V_B) + (V_A - V_C) &= 0 \qquad (453)\\
-f_1 - (V_B - V_C) - (V_C - V_A) &= 0 \qquad (454)\\
-f_1 - R_2\, I_2 + R_1\, I_1 &= 0\,, \qquad (455)
\end{aligned}$$

Come si vede dalle (449), (452) e (455), la (446) può essere riscritta nei seguenti modi

$$\begin{aligned}
\sum_i f_i - \sum_j R_j I_j &= 0 \qquad (456)\\
\sum_i f_i &= \sum_j R_j I_j\,, \qquad (457)
\end{aligned}$$

ove forze elettromotrici e correnti sono positive se concordi con il verso di percorrenza della maglia. (Si noti come le I_j possano essere diverse fra di loro ed anche avere orientamenti discordi in quanto non si sta considerando un semplice circuito con elementi posti in serie, ma una maglia definita su un circuito complicato).

Le (456) e (457) sono i modi usuali di scrivere la seconda legge di Kirchhoff, che, ricordiamo, sostanzialmente è data dalla (446) e che, banalmente, significa che "qualsiasi 'giro' si fa faccia in un circuito si ritorna allo stesso potenziale".

Uso delle leggi di Kirchhoff per risolvere i circuiti:

- si definiscono delle correnti nei diversi tratti, scegliendone arbitrariamente il verso;
- Utilizzando le (445)-(446) si scrivono n equazioni indipendenti, ove n è il numero di correnti incognite.
- Usando le ben note tecniche (sostituzione per casi semplici, metodi di algebra lineare nei casi complicati) si trovano le n correnti (con i loro segni).

25.2

Esercizio: soluzione dettagliata del circuito di par. 24.6.
Dalla seconda legge di Kirchhoff, applicata alle tre maglie, abbiamo ottenuto le tre quazioni (449), (452) e (455).
Dalla prima legge di Kirchhoff, applicata ai nodi A e C otteniamo [correnti entranti positive (portano carica al nodo), uscenti negative, con i versi fissati precedentemente (sono arbitrari, ma, una volta fissati, bisogna essere consistenti)]:

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0 \quad (A) \tag{458}$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (C)\,. \tag{459}$$

Abbiamo quindi tre incognite e cinque equazioni. Il ché vuol dire che alcune di esse sono dipendenti (portano la stessa informazione fisica). Ad esempio, chiaramente le (458) e (459) dicono la stessa cosa, e quindi se ne può utilizzare solo una. In circuiti semplici, si scartano quelle che a vista sono dipendenti [come le (458) e (459)] e si scelgono quelle più semplici, tenendo conto che tutti gli elementi del circuito compaiano nelle equazioni. Per sistemi più complicati si usano i metodi di algebra lineare (terzo anno? per ora ignoriamo).
In conclusione, scegliendo le (452), (455) e (458) e risolvendo per sostituzione, abbiamo:

$$I_1 = 40\,\mathrm{mA} \tag{460}$$

$$I_2 = -30\,\mathrm{mA} \tag{461}$$

$$I_3 = 10\,\mathrm{mA}\,. \tag{462}$$

Da questa soluzione possiamo calcolarci tutte le differenze di potenziale sulle varie resistenze e le potenze dissipate. Si noti il segno negativo di I_2.

25.3

Condensatore: oggetto in grado di accumulare delle cariche e tale che la tensione V ai suoi capi cresce linearmente con la carica accumulata Q (e, ovviamente, viceversa):

$$Q = C\,V\,, \tag{463}$$

ove C indica la capacità elettrica (si noti l'analogia con la capacità termica). La capacità è misurata in Farad (F, $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{C}/1\,\mathrm{V}$), ma questa è una unità 'grande' e vengono usati pF ($10^{-12}\,\mathrm{F}$), nF ($10^{-9}\,\mathrm{F}$) e μF ($10^{-6}\,\mathrm{F}$).
Nota: per carica accumulata si intendono cariche positive ad un 'capo' (armatura) e carica negativa ad un altro 'capo' (l'oggetto è globalmente carico). Più precisamente, se indichiamo le armature con A e B e supponiamo che ci sia la carica positiva Q in A, allora ci sarà una carica negativa in B e $V_A - V_B = V > 0$, ovvero A è positivo rispetto a B.
Applicazione: un condensatore posto in un circuito ha, ad un dato istante, una differenza di potenziale fra i suoi capi che dipende da quanta carica ha immagazzinato sino a quel momento (con un segno che dipende da quale lato si è accumulata la carica positiva).

25.4

Carica/scarica condensatore, collegandolo ad un generatore di forza elettromotrice f attraverso una inevitabile resistenza R (il caso $f = 0$ corrisponde ad un 'corto circuito' che determina la scarica la scarica del condensatore). Dalla (457):

$$f = R\,I + V_c\,. \tag{464}$$

Utilizzando la relazione fra tensione e carica del condensatore, $V_c = Q/C$ e osservando che la variazione di carica del condensatore del tempo è pari al flusso di carica nell'unità di tempo (si immagini un flusso di acqua che riempie un recipiente), ovvero $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = I$, possiamo scrivere l'equazione precedente come

$$f = R\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} \tag{465}$$

$$
\begin{aligned}
f &= R\,C\,\frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}t} + V_c && (466)\\
\frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{R\,C}\,(f - V_c)\,, && (467)
\end{aligned}
$$

ottenendo un'equazione differenziale che riscriviamo per ora nella forma generale:

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha\,(x_f - x)\,. \qquad (468)
$$

(Nel seguito vedremo altri casi fisici che portano alla stessa equazione differenziale e li risolveremo insieme una volta per tutte.)

25.5

Energia del condensatore.
Riprendiamo il circuito con un generatore, una resistenza e un condensatore posti in serie:

$$
f = R\,I + V_C\,. \qquad (469)
$$

Moltiplicando per I entrambo i membri:

$$
\begin{aligned}
I\,f &= R\,I^2 + V_C\,I && (470)\\
P_G &= P_J + P_C && (471)
\end{aligned}
$$

ove abbiamo indicato con P_G la potenza $f\,I$ erogata dal generatore, con P_J la potenza $R\,I^2$ dissipata dalla resistenza pwer effetto Joule e con P_C il nuovo termine $V_C\,I$, che associamo alla potenza per caricare il condensatore, e che possiamo riscrivere come

$$
P_C = \frac{Q}{C}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\,. \qquad (472)
$$

Durante il processo di carica del condensatore il generatore fa un lavoro totale $f\,Q = C\,f^2$. Nel frattempo l'energia immagazzinata nel condensatore vale

$$
\begin{aligned}
E_C &= \int_0^\infty \frac{1}{C}\,Q\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t && (473)\\
&= \int_0^{Q(t=\infty)} \frac{1}{C}\,Q'\,\mathrm{d}Q && (474)\\
&= \frac{1}{2}\,\frac{Q_F^2}{C} = \frac{1}{2}\,C\,f^2\,, && (475)
\end{aligned}
$$

ove abbiamo indicato con Q_F la carica 'finale' immagazzinata nel condensatore, che possiamo chiamare genericamente Q.
Confrontando l'energia erogata dal generatore con quella immagazzinata nel condensatore, si evince che la resistenza ha dissipato per effetto Joule tanta energia quanta ne è stata nel condensatore (ovvero il 50% dell'energia erogata dal generatore durante il processo di carica viene dissipato in calore).

Un modo alternativo per arrivare all'espressione di E_C consiste nel pensare al lavoro infinitesimo dL necessario per portare una carica infinitesima dQ (positiva) dall'armatura negativa a quella positica del condensatore: $\mathrm{d}L = \mathrm{d}Q\, V_C = \mathrm{d}Q\, \frac{Q}{C}$ (più è carico il condensatore e più 'costa' caricarlo). Il lavoro totale effettuato *per caricarlo* vale

$$L = \int_0^{Q_F} \frac{Q}{C}\,\mathrm{d}Q = \frac{1}{2}\,\frac{Q_F^2}{C} \tag{476}$$

e finisce in energia immagazzinata nel condensatore.

25.6

Caduta in campo gravitazionale con resistenza del mezzo tipo $-\beta\vec{v}$, ove β è una costante misurata in N/(m/s), ovvero in kg/s. Caso unidimensionale con verso positivo diretto verso il basso:

$$\begin{aligned}
F_{tot} &= m\,g - \beta\,v &(477)\\
m\,a &= m\,g - \beta\,v &(478)\\
m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= m\,g - \beta\,v &(479)\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g - \frac{\beta}{m}\,v &(480)\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{\beta}{m}\left(\frac{m\,g}{\beta} - v\right). &(481)
\end{aligned}$$

Dall'analisi dimensionale scopriamo che mg/β è una velocità (in quanto deve essere omogenea con v per potersi sommare algebricamente ad essa, e comunque si può ricavare facilmente dalle dimensioni di m di g e di β), mentre m/β ha le dimensioni di un tempo (dv/dt è una velocità diviso un tempo). Per comodità chiamiamo quindi $v_f = mg/\beta$ (vedremo nel seguito il motivo della 'f' in v_f) e

$\tau = m/\beta$, e riscriviamo l'equazione differenziale come

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{1}{\tau}\,(v_f - v)\,. \tag{482}$$

(Se invece della forza mg il corpo è sottoposto alla generica forza f, si arriva alla stessa equazione, ove τ vale sempre m/β, mentre $v_f = f/\beta$).
Notiamo, anche in questo caso una struttura formale tipo la (468).

25.7

Caso analogo che coinvolge la capacità termica: Termalizzazione verso una temperatura T_f di un corpo di capacità termica 'infinita' (es. T_f ambiente costante). [Esperimento in classe: raffreddamento di un termometro, inizialmente posto al sole, da 41 a 26 gradi.] Dato il coefficiente di 'dispersione termica'[11] η e lo sbalzo termico $(T_f - T)$ istantaneo fra la temperatura asintotica e quella del corpo che si stà termalizzando, il calore trasferito in dt vale

$$\mathrm{d}Q \;=\; \eta\,(T_f - T)\,\mathrm{d}t, \tag{483}$$

ovvero

$$C\mathrm{d}T \;=\; \eta\,(T_f - T)\,\mathrm{d}t, \tag{484}$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\eta}{c\,M}\,(T_f - T)\,. \tag{485}$$

Si riottiene la stessa struttura della (468), con $\alpha = \eta/C$ e $x_f = T_f$.

25.8

Problemi

1. Sul circuito risolto nel par. (25.2): assumendo che il punto C sia 'a massa' (al potenziale zero di riferimento), si determino i potenziali dei punti A, B e D (in particolare, si può arrivare a V_A in tre modi diversi).

[11] Chiamiamo così la costante η che compare nella (483) e seguenti. Essa è dovuto a superficie di contatto A, spessore dello strato isolante Δx e *conducibilità termica* del materiale λ da

$$\eta = \lambda \frac{A}{\Delta x}\,.$$

Le dimensioni di η sono quindi cal/(grado · secondo), ovvero anche Watt/grado. Le dimensioni della conducibilità termica sono invece cal/(grado · metro · secondo)

2. Un condensatore di $1\,\mu$F è caricato ad una differenza di potenziale di 10 V. Calcolare la carica e l'energia accumulata.

3. Una goccia d'acqua di 20 mg arriva al suolo con una velocità di 20 m/s. Calcolare il coefficiente β.

26 Giovedi 11/5, 18:00–19:00

26.1

Risolviamo la (468) per 'separazione di variabili':

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{x - x_f} &= -\alpha\,\mathrm{d}t && (486)\\ \int_{x_0=x(t=0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x - x_f} &= \int_{t=0}^{t} -\alpha\,\mathrm{d}t' && (487)\\ \log\frac{x(t) - x_f}{x_0 - x_f} &= -\alpha\,t && (488)\\ x(t) - x_f &= (x_0 - x_f)\,e^{-\alpha\,t} && (489)\\ x(t) &= x_f + (x_0 - x_f)\,e^{-\alpha\,t} && (490)\\ x(t) &= x_f + (x_0 - x_f)\,e^{-t/\tau}\,, && (491) \end{aligned}$$

ove $\tau = 1/\alpha$, delle dimensioni di un tempo, è la *costante di tempo* del fenomeno. Quando $t = \tau$,

$$(x(\tau) - x_f) \;=\; \frac{(x_0 - x_f)}{e} \approx 0.37\,(x_0 - x_f). \qquad (492)$$

26.1.1

Applicazione a carica e scarica del condensatore, con $\tau = RC$ e $x = V_c$:

Carica $x_0 = 0$, $x_f = f$:

$$V_c(t) \;=\; f + (0 - f)\,e^{-t/\tau} = f\,(1 - e^{-t/\tau})\,. \qquad (493)$$

Scarica : $x_0 = V_{c_0} = f$, $x_f = 0$:

$$V_c(t) \;=\; 0 + (f - 0)\,e^{-t/\tau} = f\,e^{-t/\tau}\,. \qquad (494)$$

26.1.2

Applicazione al termometro da temperatura iniziale T_0 a temperatura ambiente T_A:

$$T(t) \;=\; T_A + (T_0 - T_A)\, e^{-t/\tau}\,. \tag{495}$$

ove $\tau = C/\eta$: tanto maggiore è la capicità termica e minore la dispersione termica, quanto maggiore è τ, ovvero minore è la velocità di raffreddamento/riscaldamento. Si noti come, essendo $\tau = cM/\eta$, un corpo avendo una grande massa e una piccola superficie di contatto (da cui dipende η) con l'esterno si raffredda più lentamente di un corpo che ha caratteristiche opposte. Esempi di termalizzazione: thermos, laghi, Mar Mediterraneo, etc.
Valutazione empirica di τ dalla (492).

26.1.3

Applicazione a oggetto lasciato cadere dall'alto: $v_0 = 0$, $v_f = m\,g/\beta$ e $\tau = 1/\alpha = m/\beta$

$$v(t) \;=\; v_f\,(1 - e^{-t/\tau})\,. \tag{496}$$

Se invece il corpo avesse avuto una velocità iniziale v_0 avremmo avuto

$$v(t) \;=\; v_f + (v_0 - v_f)\, e^{-t/\tau}\,. \tag{497}$$

Ovviamente, lo stesso discorso vale per una qualsiasi altra forza costante F e non solo per la forza di gravità mg. Le (477) e (481) diventano quindi

$$F_{tot} \;=\; F - mg \tag{498}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\beta}{m}\left(\frac{F}{\beta} - v\right)\,, \tag{499}$$

ove la velocità finale vale F/β e la costante di tempo vale sempre m/β.

26.1.4

Esempio del paracadutista acrobatico, il quale inizialmente, senza paracadute, raggiunge una certa velocità asintotica v_{F_1} e successivamente, avendo aperto il paracadute, raggiunge la nuova velocità asintotica v_{F_2}, con $v_{F_2} < v_{F_1}$.
Problemino: calcolo dell'ordine di grandezza della velocità asintotica v_{F_2} tale che l'impatto con il terreno non sia traumatico.

26.2

Altri processi descritti da equazioni differenziali simili:

A) Si assuma che la frazione di nuclei che decadono nell'unità di tempo sia α. Si determini l'andamento del numero di nuclei nel tempo ed il tempo di dimezzamento.

B) Si pensi ad una colonia di batteri. Si assuma che ad ogni istante l'incremento o decremento del numero di individui in un 'piccolo' intervallo di tempo sia proporzionale al numero di individui vivi in quell'istante. Ricavarsi la legge con cui varia la popolazione nel tempo.

C) Denaro tenuto in banca con ricapitalizzazione 'istantanea'.

26.3

Problemi

1. Sul problema 3 della lezione precedente: assumendo la goccia inizialmente in quiete, si calcoli quanto ha impiegato per raggiungere la velocità di 10 m/s.

2. Dall'espressione della velocità in funzione del tempo (496) ricavarsi l'accelerazione in funzione del tempo.

3. Dall'espressione della velocità in funzione del tempo (496) ricavarsi lo spazio percorso in funzione del tempo.

4. Sapendo che un paracadutista di 100 kg atterra ad una velocità di 10 m/s si ricavi l'accelerazione e la forza da lui subita all'apertura del paracadute, assumendo che il fenomeno di apertura sia istantaneo (dalla soluzione del problema si capirà come tale assunzione non sia realistica).

5. Dalla (494) e dalla definizione $I = dQ/dt$ ricavarsi la corrente che scorre nel circuito durante il processo di scarica del condensatore e la tensione ai capi della resistenza.

6. [Continuazione del problema precedente] Ricavarsi la legge che dà la potenza istantanea $P_J(t)$ dissipata per effetto Joule sulla resistenza durante la scarica del condensatore e l'energia totale dissipata, ottenuta come $E_j = \int_0^\infty P_J(t)\,\mathrm{d}t$.

7. Un condensatore di $1\,\mu$F è caricato ad una differenza di potenziale di 10 V. Calcolare la carica e l'energia accumulata.

8. [Continuazione del problema precedente] Il condensatore viene fatto scaricare connettendolo ad una resistenza di $10\,000\,\Omega$ ($10\,\mathrm{k}\Omega$). Calcolare quanto vale carica ed energia nel condensatore dopo 5 ms (millisecondi) dall'inizio della scarica.

9. Un condensatore inizialmente a 10 V è fatto scaricare su una resistenza di $1\,\mathrm{M}\Omega$. Sapendo che la differenza di potenziale ai suoi capi impiega 35 ms per portarsi a 5 V, calcolare la capacità del condensatore.

10. Un condensatore è caricato a 10 V e successivamente viene scaricato su una resistenza da $10\,\mathrm{k}\Omega$ ($10000\,\Omega$). Si misura che dopo 11 ms (10^{-3} s) la tensione si è ridotta a 5 V: Determinare la capacità del condensatore.

11. Un bicchiere di acqua di 200 g, inizialmente a $80\,^o$C, raggiunge la temperatura ambiente di $20\,^o$C. Sapendo che dopo 20 minuti la temperatura era scesa a $42\,^o$C, determinare il τ dell'andamento esponenziale di raffreddamento. Determinare anche η.

27 Venerdi 12/5, 14:00–16:00

27.1

Per completare la calorimetria: **calore latente** di fusione e di evaporazione. Durante una transizione di fase (acqua-ghiaccio, acqua-vapore) il sistema assorbe/cede calore senza cambiare la temperatura (esempio quotidiano acqua: che bolle in attesa che ci si decida a buttare giù la pasta). Valori per l'acqua: fusione $\lambda = 80\,\mathrm{cal/g}$; ebollizione: $\lambda = 540\,\mathrm{cal/g}$.
Esempio: 10 g di chiaccio a -10 ^{o}C in 50 g acqua a 20 ^{o}C: $\rightarrow$ temperatura di equilibrio (altra informazione necessaria: calore specifico del ghiaccio, circa 1/2 di quello dell'acqua). Il calore ceduto dai 50 g di acqua inizialmente a $20\,^o$C serve a: innalzare la temperatura del ghiaccio da $T_g = -10\,^o$C a $0\,^o$C; far fondere il ghiaccio; innalzare la temperatura del'acqua ottenuta dalla fusione del ghiaccio da $0\,^o$C a T_e. In totale abbiamo quindi

$$c_A\,M(T_e - T_A) + c_g\,M_g\,(0 - T_g) + \lambda M_g + c_A\,M_g\,(T_e - 0) \;=\; 0\,, \qquad (500)$$

ovvero

$$c_A\, M(T_A - T_e) = c_g\, M_g\,(0 - T_g) + \lambda M_g + c_A\, M_g\,(T_e - 0)\,, \tag{501}$$

con c_A e c_g calori specifici di acqua e ghiaccio. Si ottiene $T_e = 2.5\,^o$C. L'acqua a temperatura ambiente ha perso 885 cal, delle quali: 50 sono servite a scaldare il ghiaccio, 800 a farlo fondere e 25 per portarlo a $2.5\,^o$C

27.2

Forza di Lorentz dovuta a campi magnetici ($\vec{B}$, Tesla, T) su particelle cariche (carica q) in movimento (velocità $\vec{v}$):

$$\vec{F} \;=\; q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \tag{502}$$

ove il simbolo "$\wedge$" (anche indicato con "$\times$") indica il *prodotto vettoriale* (a differenza del prodotto scalare, il risultato è un vettore).
Proprietà del prodotto vettoriale: dato $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}$:

- $\vec{c}$ è ortogonale sia ad $\vec{a}$ che a $\vec{b}$, e quindi ortogonale al piano definito da $\vec{a}$ e $\vec{b}$;
- il modulo di $\vec{c}$ è dato dal prodotto dei moduli di $\vec{a}$ e $\vec{b}$ per il seno dell'angolo fra loro compreso: $c = a \cdot b \cdot \sin\theta$;
- il verso è tale che, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono diretti rispettivamente lungo i versori $\hat{x}$ e $\hat{y}$ (ovvero $\hat{i}$ e $\hat{j}$), $\vec{c}$ è diretto lungo $\hat{z}$ (ovvero $\hat{k}$);
- il prodotto vettoriale anticommuta: $\vec{b} \wedge \vec{a} = -\vec{a} \wedge \vec{b}$ (quindi bisogna fare attenzione all'ordine di $\vec{v}$ e $\vec{B}$ nell'espressione della forza).
- note le componenti di $\vec{a}$ e di $\vec{b}$ le componenti di $\vec{c}$ sono ottenute dal determinante di

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{503}$$

ovvero

$$\vec{c} \;=\; (a_y b_z - a_z b_y) \cdot \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \cdot \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_z) \cdot \hat{k}\,. \tag{504}$$

La forza di Lorentz è più complicata di quelle viste finora in quanto dipende da carica, velocità, campo magnetico, direzioni e versi di $\vec{v}$ e $\vec{B}$.
Unità di misura del campo magnetico nel S.I.: tesla (T). Se la carica è espressa in Coulomb, la velocità in metri al secondo e il campo magnetico in tesla, la forza risultante sarà in newton. Altra unità pratica del campo magnetico: gauss, pari a 10^{-4} T. Come ordine di grandezza: il campo magnetico terrestre a Roma ha un'intensità di circa 1/2 gauss.

27.3

Nota importante: la forza di Lorentz non compie lavoro in quanto $\mathrm{d}L = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v} \mathrm{d}\, t$, con $\vec{F}$ e $\vec{v}$ ortogonali.
Caso generale di particella carica in campo magnetico ed elettrico:

$$\vec{F} = q\,\vec{E} + q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}\,. \tag{505}$$

27.4

Esempio: moto di una particella carica in campo magnetico $\vec{B}$ uniforme ortogonale a $\vec{v}$:

$$F = q\,v\,B\,, \tag{506}$$

costante e sempre ortogonale a $\vec{v}$: $\rightarrow$ moto circolare uniforme, con forza centripeta $q\,v\,B$:

$$m\,\frac{v^2}{R} = q\,v\,B \tag{507}$$

$$R = \frac{m\,v}{q\,B} \tag{508}$$

$$T = \frac{2\pi\,m}{q\,B} \tag{509}$$

Il raggio varia linearmente con v, mentre il periodo (e quindi la frequenza) non dipendono da essa (!): principio del ciclotrone ($\nu = 1/T$ è la 'frequenza di ciclotrone'). Si noti invece la dipendenza del raggio dall'energia cinetica:

$$R = \frac{m}{q\,B}\sqrt{\frac{2\,E_c}{m}} \tag{510}$$

$$E_c = \frac{q^2 B^2 R^2}{2\,m}\,. \tag{511}$$

27.5

Problemi

1. Trovare la soluzione numerica dell'esempio dei 10 g di ghiaccio in 50 g di acqua.

2. In attesa di buttar giù la pasta, si tiene una pentola in ebollizione ed evapora un litro di acqua. Calcolare l'energia sprecata (in kwh).

3. Si vuole raffreddare un bicchiere d'acqua (200 g) da 30 gradi a 10 gradi mettendoci del ghiaccio inizialmente a zero gradi. Quanta acqua ci sarà nel bicchiare all'equilibrio?

4. Stesso problema, con 50 g di cognac (40% di alcool in volume). Quanto varrà la gradazione alcolica finale?

5. Una particella di carica $q = 10^{-12}\,\mathrm{C}$ si muove con una velocità di componenti $(10000, 0, 0)\,\mathrm{m/s}$ ed è soggetta ad un campo magnetico di componenti $(0, 0, -1)\,\mathrm{T}$: trovare modulo, direzione e verso della forza di Lorentz [non usare la (504)]

27.6

Esercitazioni (seconda ora).

28 Lunedi 15/5, 15:00–17:00

28.1

Oscillazioni smorzate
Equazioni del moto di corpo soggetto a forza elastica e forza di viscosità $-\beta\vec{v}$ (caso unidimensionale):

$$F = -k\,x - \beta\,v \tag{512}$$

$$m\,a = -k\,x - \beta\,v\,, \tag{513}$$

ovvero

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \beta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\,x = 0 \tag{514}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\beta}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,x \;=\; 0 \tag{515}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x \;=\; 0\,, \tag{516}$$

con $\gamma = \beta/m$ e $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, entrambe aventi le dimensioni dell'inverso del tempo. Il caso con $\beta = 0$, ovvero $\gamma = 0$ si riduce all'oscillatore armonico. $\beta \neq 0$ introduce lo smorzamento, come mostrato nell'esperienza in aula (moto della molla).

28.2

Introduzione (empirica) all'induttanza, come elemento del circuito ai capi del quale c'è una differenza di potenziale proporzionale alla variazione nel tempo della corrente, con coefficiente di proporzionalità L

$$F_L \;=\; -L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,. \tag{517}$$

Si può verificare che le dimensioni di L sono quelle di $\Omega\cdot\mathrm{s}$ [$L = -F_L/(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t) \rightarrow \mathrm{V}/(\mathrm{A}/\mathrm{s}) \rightarrow \Omega\cdot\mathrm{s}$]. La sua unità di misura è l'Henry (H): $1\,\mathrm{H} = 1\,\Omega \times 1\,\mathrm{s}$.

28.3

Effetto nel circuito di (auto-)induttanza, con introduzione qualitativa (l'induzione magnetica vera e propria non fa parte del corso):

- Corrente I che percorre una 'bobina': $\rightarrow$ campo magnetico.
  Esempio: elettromagnete, come quelli negli altoparlanti (segnale musicale $\rightarrow$ corrente $I(t)$ all'uscita dell'amplificatore $\rightarrow$ campo magnetico $B(t)$ modulato dal segnale musicale $\rightarrow$ magnete permanente immerso in $B(t)$ e solidale con la membrana dell'altoparlante $\rightarrow$ oscillazione membrana $\rightarrow$ suono).

- Se I cambia con il tempo: $\rightarrow$ forza elettromotrice indotta ai capi della bobina $-\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. Il segno meno ha il seguente significato: se la corrente scorre dal capo A al capo B dell'induttore (la bobina) e cresce (ovvero $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t > 0$), la forza elettromotrice indotta è tale che $V(A) < V(B)$; viceversa se la corrente diminuisce.

- La forza elettromostrice indotta è “tale da opporsi alla causa che l’ha generata”: se I sta scorrendo da A a B ed aumenta, la forza elettromotrice indotta tende a ridurla.

Siamo interessati a studiare l’effetto di L sul circuito dalla sola conoscenza della (517). Ad esempio, vediamo come cambia la legge di scarica del condensatore se aggiungiamo anche una induttanza in serie a C ed R. Scegliendo il verso positivo della corrente quello che carica il condensatore, ovvero quello per cui $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = I$, dalla (446) abbiamo

$$
\begin{aligned}
\Delta V_C + \Delta V_R + \Delta V_L &= 0 && (518)\\
-V_C - R\,I - L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= 0 && (519)\\
-\frac{Q}{C} - R\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - L\,\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} &= 0 && (520)\\
L\,\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + R\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} &= 0 && (521)\\
\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L\,C}\,Q &= 0 && (522)\\
\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,Q &= 0 && (523)
\end{aligned}
$$

(ove $\gamma = R/L$ e $\omega_0^2 = 1/LC$), formalmente uguale alla (516) e quindi avente analoga soluzione. Siamo quindi interessati a risolvere la generica equazione differenziale, scritta nella generica variabile z

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,z = 0 \qquad (524)$$

Prima di risolvere questa equazione differenziale, analizziamo l’analogia fra i due problemi fisici, in particolare confrontando la (521) con la (514). In un caso siamo interessati alla variazione nel tempo della posizione $x(t)$ del un punto legato all’estremo di una molla, in un altro alla carica $Q(t)$ depositata su un’armatura del condensatore. Nel caso meccanico la derivata rispetto al tempo della quantità di interesse rappresenta la velocità, nel caso elettrico la corrente elettrica. Inoltre:

- $\beta\,v$ rappresenta la forza di attrito di viscosità, ovvero il termine che ‘brucia’ energia, nel senso che se $\beta = 0$ il sistema conserva l’energia meccanica, ovvero la (514) si riduce ad un oscillatore armonico ideale.

- L'equivalente elettrico di β è la resistenza R, la quale consuma energia per effetto Joule. Si evince quindi che un *ideale circuito* (resistenze nei circuiti, benché minime, sono inevitabili, cosìcome inevitabili sono gli attriti nei sistemi meccanici) avente solo C ed L (ovvero quello che si chiama un circuito 'LC', mentre il circuito con $R \neq 0$ si chiama genericamente 'RLC', o 'RCL') si comporterebbe come un oscillatore armonico nella variabile $Q(t)$, con l'energia che viene 'palleggiata' fra condensatore e induttanza, con periodo $2\pi/\omega_0$. Conosciamo bene il caso meccanico. Scriviamo le espressioni di $Q(t)$ e $I(t)$:

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t) \quad (525)$$

$$I(t) = -Q_0\,\omega_0 \sin(\omega_0 t)\ : \quad (526)$$

  – inizialmente il condensatore comincia a scaricarsi e circola una corrente negativa, inizialmente nulla e che cresce in modulo con il tempo, la quale produce un campo magnetico nella bobina;

  – dopo un quarto di periodo (ovvero quando $\omega_0 t = \pi/2$) il condensatore si è completamente scaricato e la corrente è massima in modulo (è minima, se si considera anche il segno);

  – per t immediatamente maggiore di $T/4$ la corrente ricarica il condensatore, ma con polarità opposta (cariche positive cominciano ad arrivare sull'armatura inizialmene negativa), la corrente decresce in modulo e per $T/2$ il condensatore è di nuovo carico, con $Q(T/2) = -Q(0)$;

  – poi tutto procede a ritroso, al tempo T il sistema ritorna esattamente nello stato iniziale e il moto si ripete all'infinito.

  Si noti come varia l'energia del condensatore nel tempo. In particolare per $t = 0,\ \pi,\ \ldots$ è pari all'energia iniziale $1/2\, C\, V_{C_0}^2$, mentre per $t = \pi/2,\ 3/2\pi,\ \ldots$ essa è nulla: l'energia mancante è da ricercare nell'energia associata ad L (energia del campo magnetico).

- L è l'analogo della massa (inerziale) m in quanto si oppone alla variazione di I.

- Infine l'analogo della costante elastica k della molla è $1/C$: come una molla più è lontana dalla posizione di equilibrio e più è difficile tirarla/comprimerla ancora, così un condensatore più è carico e più è difficile caricarlo ulteriormente [in quanto il lavoro da compiere per aggiungere dQ è pari a

$(Q/C)\,\mathrm{d}Q]$. Questo spiega anche perché l'equivalente della costante elastica è $1/C$: minore è C, maggiore è la tensione ai capi del condensatore a parità di carica applicata e quindi più difficile è caricarlo.

Possiamo finalmente scrivere la seguente tabella di analogie:

$$x \leftrightarrow Q \tag{527}$$
$$v \leftrightarrow I \tag{528}$$
$$a \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{529}$$
$$m \leftrightarrow L \tag{530}$$
$$k \leftrightarrow \frac{1}{C} \tag{531}$$
$$\beta \leftrightarrow R \tag{532}$$
$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 \leftrightarrow \frac{1}{2}\,L\,I^2 \tag{533}$$
$$\frac{1}{2}\,k\,x^2 \leftrightarrow \frac{1}{2}\,\frac{1}{C}\,Q^2 \tag{534}$$
$$\beta\,v^2 \leftrightarrow R\,I^2 \tag{535}$$
$$\sqrt{\frac{k}{m}} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \tag{536}$$

nella quale si è introdotta l'energia $1/2\,L\,I^2$ associata ad L.

Se β, o rispettivamente R, è diverso da zero, l'oscillazione è smorzata, in quanto ogni volta che la velocità, o rispettivamente la corrente, è diversa da zero viene dissipata energia con una potenza pari a $\beta\,v^2$, ovvero $R\,I^2$.

28.4

Problemini

1. La corrente alternata $I = I_0 \cos(2\pi\nu\,t)$, con $I_0 = 1\,\mathrm{A}$ e $\nu = 50\,\mathrm{Hz}$, attraversa una bobina avente un'induttanza di $L = 10\,\mathrm{mH}$. Trovare quanto vale la tensione ai capi dell'induttanza.

2. Una bobina di autoinduttanza $L = 100\,\mathrm{mH}$ è attraversata da una corrente continua di $0.5\,\mathrm{A}$. Calcolare l'energia immagazzinata nella bobina.

3. Un circuito di resistenza trascurabile ha una capacità di $10\,\mathrm{nF}$ e un'induttanza di $100\,\mathrm{mH}$. Calcolare la frequenza propria del circuito.

4. Un circuito costituito da un condensatore di $50\,\mathrm{nF}$, un'induttanza di valore incognito L e resistenza trascurabile: sapendo che la tensione ai capi del condensatore in funzione del tempo è data da $V_C = V_{C_0} \cos\omega\, t$, con $\omega = 10^5\,\mathrm{s}^{-1}$, calcolare il valore di L, il massimo valore dell'intensità di corrente che fluisce nel circuito e il massimo valore della differenza di tensione ai capi di L.

5. Un'auto richiede una potenza di 20 CV per andare, in pianura, a 50 km/m. Calcolare la forza di attrito dell'aria, assumendo che sia proporzionale alla velocità.

28.5

Esercitazione: rassegna dei problemi d'esame del 2004 (programma leggermente diverso): giugno (1-5, 8-18) e luglio (1-4).

29 Giovedi 18/5, 18:00–19:00

29.1

Per quanto riguarda la **soluzione della (524)**, ricordiamo che il procedimento è quello di partire da una soluzione di prova complessa (la cui parte reale costituisce la soluzione fisica) del tipo

$$z(t) \;=\; K\, e^{\alpha\, t}\,, \tag{537}$$

la quale, inserita nella (524) dà luogo a

$$\alpha^2\, K\, e^{\alpha\, t} + \gamma\, \alpha\, K\, e^{\alpha\, t} + \omega^2\, K\, e^{\alpha\, t} \;=\; 0 \tag{538}$$

da cui segue l'*equazione algebrica associata*

$$\alpha^2 + \gamma\, \alpha + \omega^2 \;=\; 0 \tag{539}$$

le cui soluzioni sono

$$\alpha_{1,2} \;=\; -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\,. \tag{540}$$

Essendo sia α_1 che α_2 soluzione della (524), la soluzione generale è data da

$$z(t) \;=\; K_1\, e^{\alpha_1\, t} + K_2\, e^{\alpha_2\, t}\,. \tag{541}$$

Il tipo di soluzioni dipende dal segno del discriminante $(\gamma/2)^2 - \omega_0^2$:

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 > 0 \;\;\Rightarrow\;\; \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ reali negative: caso `sovrasmorzato'} \tag{542}$$

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 < 0 \;\;\Rightarrow\;\; \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ complesse coniugate: caso `sottosmorzato'} \tag{543}$$

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \alpha_1 = \alpha_2 \text{ (reale negativa): caso `critico'}\,. \tag{544}$$

29.2

Soluzione dell'oscillatore smorzato, sia meccanico che elettrico, con le **condizioni iniziali**

$$z(0) = z_0 \tag{545}$$

$$\dot{z}(0) = 0\,, \tag{546}$$

ovvero: allungamento iniziale della molla e velocità nulla nel caso meccanico; carica iniziale del condensatore e corrente nulla nel caso elettrico. Le due condizioni danno:

$$K_1 + K_2 = z_0 \tag{547}$$

$$\alpha_1\, K_1 + \alpha_2\, K_2 = 0 \tag{548}$$

da cui

$$K_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\, z_0 \tag{549}$$

$$K_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\, z_0\,. \tag{550}$$

Nota: α_1 e α_2 dipendono dai parametri del sistema; K_1 e K_2 dalle condizioni iniziali e dai parametri del sistema.

Vediamo i due casi più interessanti (trattando il caso critico come caso limite di quello sottosmorzato):

$\boxed{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 > 0}$ Indicando con

$$\alpha_1 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = -\left[\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\right] \tag{551}$$

$$\alpha_2 = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = -\left[\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\right] \tag{552}$$

(si noti che $|\alpha_1| < |\alpha_2|$) e chiamando $\tau_1 = -1/\alpha_1$ e $\tau_2 = -1/\alpha_2$ (con $\tau_1 > \tau_2 > 0$), la soluzione diventa

$$
\begin{aligned}
z(t) &= K_1\, e^{\alpha_1\, t} + K_2\, e^{\alpha_2\, t} && (553)\\
&= z_0 \left[\frac{\alpha_2}{\alpha 2 - \alpha_1}\, e^{\alpha_1\, t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\, e^{\alpha\, t} \right] && (554)\\
&= z_0 \left[\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\, e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}\, e^{-t/\tau_2} \right], && (555)
\end{aligned}
$$

ove quest'ultima scrittura mette in evidenza come $K_1 > 10$ e $K_2 < 0$: i due esponenziali negativi hanno coefficienti di segno opposto, fatto importante per riprodurre $\dot{z}(0) = 0$. Ma l'esponenziale con $K_2 < 0$ si estingue rapidamente e, dopo alcuni τ_2, prevale l'esponenziale con $K_1 > 0$.

$\boxed{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 < 0}$ Introducendo

$$
\omega_1^2 \;=\; \omega_0^2 - (\gamma/2)^2 > 0\,, \qquad (556)
$$

indichiamo le due soluzioni con

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\frac{\gamma}{2} + j\,\omega_1 && (557)\\
\alpha_2 &= -\frac{\gamma}{2} - j\,\omega_1\,, && (558)
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \frac{-\frac{\gamma}{2} - j\,\omega_1}{-2\,j\,\omega_1}\, z_0 = z_0 \left(\frac{1}{2} - j\,\frac{\gamma}{4\,\omega_1} \right) && (559)\\
K_2 &= \frac{-\frac{\gamma}{2} + j\,\omega_1}{2\,j\,\omega_1}\, z_0 = z_0 \left(\frac{1}{2} + j\,\frac{\gamma}{4\,\omega_1} \right). && (560)
\end{aligned}
$$

La soluzione è quindi

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \frac{z_0}{2} \left(1 - j \frac{\gamma}{2\,\omega_1} \right) e^{-\gamma/2\,t}\, e^{j\,\omega_1\,t} && (561)\\
&\quad + \frac{z_0}{2} \left(1 + j \frac{\gamma}{2\,\omega_1} \right) e^{-\gamma/2\,t}\, e^{-j\,\omega_1\,t} && (562)
\end{aligned}
$$

la cui parte reale è (provare a fare i conti come esercizio, ricordandosi[12] che $e^{j\,x} = \cos x + j \sin x$)

$$Z(t) = \mathrm{Re}\, z(t) \quad = \quad z_0\, e^{-t/\tau} \left[\cos(\omega_1\, t) + \frac{\gamma}{2\,\omega_1}\, \sin(\omega_1\, t)\right] \qquad (563)$$

con $\tau = 2/\gamma$. [Si verifichi che $Z(0) = z_0$ e $\dot{Z}(0) = 0$.]

Si può verificare inoltre[13] che la (563) può essere riscritta come

$$Z(t) \quad = \quad \frac{z_0}{\cos\varphi}\, e^{-t/\tau}\, \cos(\omega_1\, t + \varphi)\,, \qquad (564)$$

con $\varphi = \arctan(-\gamma/2\,\omega_1)$ e quindi $\cos\varphi = 1/\sqrt{1 + (\gamma/2\omega_1)^2}$.

La (564), più facile da leggere e da memorizzare dell'equivalente (563), ci mostra uno moto oscillante con ampiezza decrescente nel tempo in modo esponenziale. Si noti che $\omega_1 < \omega_0$, ovvero $T_1 > T_0$: lo smorzamento rallenta l'oscillazione.

29.3

Problemi

[12] Espandendo in serie di Taylor $e^{j\,x}$, $\sin x$ e $\cos x$ si ottiene:

$$\begin{aligned} e^{j\,x} &= 1 + j\,x - \frac{x^2}{2!} - j\,\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j\,\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - j\,\frac{x^7}{7!} + \ldots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\,. \end{aligned}$$

da cui $e^{j\,x} = \cos x + j \sin x$.

[13] Con un po' di trigonometria si può vedere come $(1/\cos\varphi)\,\cos(\omega_1 t + \varphi)$ può essere riscritta come

$$\begin{aligned} (1/\cos\varphi)\,\cos(\omega_1 t + \varphi) &= \frac{1}{\cos\varphi}[\cos\omega_1 t \cdot \cos\varphi - \sin\omega_1 t \cdot \sin\varphi] \\ &= \cos\omega_1 t - \tan\varphi \cdot \sin\omega_1 t \\ &= \cos\omega_1 t + \frac{\gamma}{2\omega_1}\,\sin\omega_1 t\,. \end{aligned}$$

Si ricordi inoltre che $\cos(\arctan\alpha) = 1/\sqrt{1+\alpha^2}$.

1. Un corpo di 800 g, legato all'estremità di una molla, è anche soggetto a una forza di viscosità del tipo $-\beta\, v$. Sapendo che l'ampiezza delle oscillazioni si è ridotta di $1/e$ in 5 minuti, trovare il coefficiente β.

2. Un corpo di 1 kg è legato all'estremo di una molla di costante elastica $k = 45\,\mathrm{N/m}$. Calcolare il massimo coefficiente di viscosità β affinché il corpo effettui almeno una oscillazione prima di tornare alla sua posizione di equilibrio.

3. Un corpo, sospeso ad una molla oscilla senza attriti con un periodo di 0.5 secondi. Successivamente, posto in un mezzo viscoso, esso oscilla con pseudoperiodo di 0.513 secondi. Calcolare il rapporto fra coefficiente di viscosità e la massa del corpo.

4. Un condensatore di 5 nF, inizialmente a 10 V, viene fatto scaricare su una resistenza di 150 Ω e un'induttanza di 10 mH posti in serie. Calcolare lo pseudoperiodo dell'oscillazione smorzata.

5. Sul problema precedente: calcolare la tensione ai capi del condensatore dopo la prima oscillazione (ovvero dopo uno pseudoperiodo dall'inizio della scarica).

6. Ancora sul problema precedente: calcolare l'energia persa dal sistema durante la prima oscillazione.

30 Venerdi 19/5, 14:00–16:00

30.1

Seguito lezione precedente:

$\boxed{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 = 0}$ Questa condizione si ottiene come limite per $\omega_1 \to 0$. Dalla (563), sviluppando in serie, otteniamo[14] otteniamo:

$$Z(t) \approx z_0\, e^{-t/\tau} \left[1 - \frac{(\omega_1\, t)^2}{2} + \frac{\gamma}{2\,\omega_1}(\omega_1\, t)\right], \tag{565}$$

[14] Si ricorda che per $\epsilon \ll 1$

$$\begin{aligned} \sin\epsilon &\approx \epsilon \\ \cos\epsilon &\approx 1 - \frac{\epsilon}{2}\,. \end{aligned}$$

che, per $\omega_1 \to 0$, diventa

$$Z(t) = z_0\, e^{-t/\tau} \left[1 + \frac{\gamma}{2}\, t\right] \quad (566)$$

$$= z_0\, e^{-t/\tau} \left[1 + \frac{t}{\tau}\right] . \quad (567)$$

[Si verifichi che $Z(0) = z_0$ e $\dot{Z}(0) = 0$.]

30.2

Oscillatore smorzato: considerazioni energetiche.
Riprendiamo oscillatore smorzato, caso sottosmorzato, di cui riscriviamo la soluzione nella forma (564)

$$Z(t) = \frac{z_0}{\cos\varphi}\, e^{-t/\tau} \cos\left(\omega_1\, t + \varphi\right) \quad (568)$$

e ci ricordiamo che a seconda dei problemi incontrati Z ha il significato dello scostamento x rispetto alla posizione di equilibrio o di carica Q. Concentriamoci sul caso meccanico (quello elettrico è assolutamente equivalente), ovvero

$$x(t) = \frac{x_0}{\cos\varphi}\, e^{-t/\tau} \cos\left(\omega_1\, t + \varphi\right) . \quad (569)$$

Energia meccanica all'istante $t = 0$ e dopo n pseudoperiodi, nell'approssimazioni che l'oscillatore è poco smorzato e quindi $\omega_1 \approx \omega_0$:

$$E_0 = E(n = 0) = \frac{1}{2}\, k\, x_0^2 \quad (570)$$

$$E(n) = \frac{1}{2}\, k\, x^2(t = nT_1) \quad (571)$$

Altre utili approssimazioni

$$e^\epsilon \approx 1 + \epsilon$$
$$(1+\epsilon)^2 \approx 1 + 2\,\epsilon$$
$$\sqrt{(1+\epsilon)} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$$
$$\frac{1}{1+\epsilon} \approx 1 - \epsilon$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\,k\,x_0^2\,e^{-2\,n\,T_1/\tau} && (572)\\
&= E_0\,e^{-(2\pi\gamma/\omega_1)\,n} && (573)\\
&\approx E_0\,e^{-(2\pi\gamma/\omega 0)\,n}\,. && (574)
\end{aligned}
$$

Il rapporto fra $E(n+1)/E(n)$ da un periodo all'altro vale

$$
\frac{E(n+1)}{E(n)} = e^{-(2\pi\gamma/\omega_0)}\,, \qquad (575)
$$

ovvero in un periodo abbiamo una variazione frazionaria di

$$
\begin{aligned}
\frac{E(n+1)-E(n)}{E(n)} &\approx e^{-(2\pi\gamma/\omega_0)} - 1 && (576)\\
&\approx 1 - \frac{2\,\pi\,\gamma}{\omega_0} - 1 && (577)\\
&\approx -\frac{2\,\pi\,\gamma}{\omega_0}\,, && (578)
\end{aligned}
$$

ove abbiamo usato nel penultimo passaggio l'approssimazione $e^{-\epsilon} \approx 1-\epsilon$.
Inoltre, possiamo riscrivere la (574) come

$$
\begin{aligned}
E(n) &\approx E_0\,e^{-n/n_c} && (579)\\
(\,n_c &= \frac{1}{2\,\pi}\frac{\omega_0}{\gamma}\,)\,. && (580)
\end{aligned}
$$

ove n_c acquista il significato di 'numero di oscillazioni che l'oscillatore impiega per ridurre ad $1/e$ la sua energia iniziale: $\rightarrow$ altro andamento esponenziale!
Ovviamente, essendo il numero di periodi proporzionale al tempo trascorso, in quanto $t = n\,T = n\,(2\pi/\omega_0)$, e considerando l'andamento 'medio' dell'energia, valido ad ogni numero intero di periodi (l'andamento esatto è un po' più complicato, in quanto la variazione dell'energia nell'unità di tempo è proporzionale al quadrato della velocità istantanea), otteniamo

$$
< E(t) > \;\approx\; E_0\,e^{-\gamma\,t} = E_0\,e^{-t/\tau_E}\,, \qquad (581)
$$

con $\tau_E = 1/\gamma$: l'andamento dell'energia nel tempo è esponenziale, con una costante di tempo inversamente proporzionale al coefficiente di viscosità β (o l'equivalente elettrico R nel circuito RLC).
Fattore di qualità (o di merito) di un circuito smorzato. Definizione:

$$
Q = \frac{\omega_0}{\gamma}\,. \qquad (582)
$$

(Da non confondere con il simbolo della carica elettrica). Possiamo riscrivere le (578) e (580) come

$$\begin{aligned} \frac{E(n+1)-E(n)}{E(n)} &\approx -\frac{2\,\pi}{Q} && (583)\\ n_c &\approx \frac{Q}{2\,\pi}, && (584) \end{aligned}$$

ovvero

- maggiore è il fattore di merito e minore è l'energia frazionaria persa per ogni oscillazione e, di conseguenza, maggiore il numero di oscillazioni prima che il sistema abbia perso una certa frazione prefissata di energia;
- in particolare, la (584) ci dice che $Q/2\pi$ rappresenta (approssimativamente) il numero di oscillazioni necessarie affinchè l'energia del sistema si riduca di $1/e$ di quella iniziale.

Il termini dei parametri del sistema Q vale:

$$\text{Oscillatore meccanico:} \qquad Q = \frac{1}{\beta}\sqrt{m\,k} \tag{585}$$

$$\text{Oscillatore elettrico:} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,. \tag{586}$$

30.3

Oscillatore forzato Riprendiamo l'equazione (513) e aggiungiamo una forza periodica sinusoidale[15] $f(t) = f_0 \cos\omega t$. la forza totale sarà quindi

$$F \;=\; -k\,x - \beta\,v + f_0\,\cos\omega t \tag{587}$$

la (513) e seguenti diventano quindi

$$\begin{aligned} m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \beta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\,x &= f_0\,\cos\omega t && (588)\\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\beta}{m}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,x &= \frac{f_0}{m}\,\cos\omega t && (589)\\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x &= \eta\,\cos\omega t\,. && (590) \end{aligned}$$

[15] L'importanza dello studio di moti periodici sinusoidali è lagato al teorema di Fourier, attraverso è possibile scrivere qualsiasi funzione periodica come una opportuna combinazioni di sinusoidi.

Analogalmente, se nel circuito RCL aggiungiamo una forza elettromotrice cariabile nel tempo $f(t) = f_0 \cos\omega t$, la (522) e seguenti diventano

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L\,C}\,Q \;=\; f_0\,\cos\omega t \tag{591}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,Q \;=\; \frac{f_0}{L}\,\cos\omega t\,, \tag{592}$$

formalmente analoga alla (590) . Risolviamo quindi la generica

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,z \;=\; \eta_0\,\cos\omega t\,, \tag{593}$$

ove η_0 sta per f_0/m o f_0/L, a seconda che si tratta del caso meccanico o elettrico (si noti che in entrambi i casi il denominatori rappresenta un termine di inerzia). Si noti come nel caso meccanico $f_0/m\,\cos\omega t$ rappresenta l'accelerazione dovuta alla sola forza $f(t)$.
Come è noto, la soluzione della (593) è pari alla somma della soluzione omogenera e di quella particolare. Come abbiamo visto precedentemente, la soluzione omogenea (ovvero quella con $\eta_0 = 0$) dà luogo ad una soluzione smorzata che asintoticamente si estingue. Dopo $\approx 5\,Q$ oscillazioni (ove Q è il fattore di merito) resta soltanto la soluzione particolare, 'forzata' alla stessa frequenza di $f(t)$. Quindi la soluzione sarà del tipo

$$z(t) \;=\; z_0\,\cos\left(\omega t + \varphi\right). \tag{594}$$

Come è anche noto, i conti si semplificano se usiamo la notazione complessa, ovvero: consideriamo

$$\eta_0 \cos\omega t \;=\; \mathrm{Re}[\eta_0\,e^{j\omega t}]\,; \tag{595}$$

usiamo la variabile complessa

$$z \;=\; z_0\,e^{j\omega t}\,, \tag{596}$$

ove z_0 è essa stessa una variabile complessa, e contenente quindi la fase φ:

$$z_0 \;=\; Z_0\,e^{j\varphi} \tag{597}$$

$$z \;=\; Z_0\,e^{j\varphi}\,e^{j\omega t}\,, \tag{598}$$

ove con Z_0 indichiamo l'ampienza fisica dell'oscillazione (variabile reale).
Risolviamo quindi la (593) per variabili complesse e infine prediamo la parte reale del risultato.

30.4

Esercitazione: rassegna dei problemi d'esame del 2004 (programma leggermente diverso): luglio (5, 8, 10) e settembre (1-4, 6, 9).

30.5

Problemi

1. Calcolare
   - $e^{j\,\pi/2}$
   - $e^{j\,\pi}$
   - $\mathrm{Re}[Z_0\, e^{j\varphi}\, e^{j\omega t}]$
   - $\mathrm{Im}[Z_0\, e^{j\varphi}\, e^{j\omega t}]$
   - Modulo di $5 \times e^{j\,\pi/4}$
   - Fase di $5 \times e^{j\,\pi/4}$.
2. Provare a risolvere la (593) seguendo le indicazioni.

31 Lunedi 22/5, 15:00–17:00

31.1

Soluzione della (593) Sostituendo la soluzione di prova $z = z_0\, e^{j\omega t}$ nella (593) otteniamo

$$\begin{aligned} -\omega^2\, z_0\, e^{j\omega t} + j\omega\,\gamma\, z_0\, e^{j\omega t} + \omega_0^2\, z_0\, e^{j\omega t} &= \eta_0 \cos\omega t && (599)\\ z_0\,(-\omega^2 + j\omega\,\gamma + \omega_0^2) &= \eta_0 && (600)\\ z_0 &= \frac{\eta_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\,\gamma}\,, && (601) \end{aligned}$$

dalla quale si ricavano[16] ampiezza di z, che scriviamo con Z_0 e la sua fase φ:

$$Z_0 = \frac{\eta_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}} \quad (602)$$

$$\varphi = \arctan\frac{\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\,, \quad (603)$$

ovvero la soluzione completa è

$$z(t) = \frac{\eta_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}\cos\left[\omega t+\arctan\frac{\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\right] \quad (604)$$

Discussione del risultato: $\rightarrow$ **risonanza**.
Per $\omega = \omega_0$ (ω_0 è detta frequenza di risonanza) l'ampiezza di oscillazione ha un massino e vale $\eta_0/\gamma\omega_0$, inversamente proporzionale al coefficiente del termine dissipativo (β o R nei due casi).

31.2

Corpi estesi: possono traslare (moto del baricentro) e ruotare. Definizione di corpo rigido.
Forze possono cambiare stato di rotazione: coppia: forze opposte, non sulla stessa retta di applicazione (sia b la distanza fra le due rette):

- somma delle forze esterne è nulla: v_{cm} non cambia (per semplicità ci concentriamo su corpi fermi);

- accelerazione angolare, che dipende da: F; b; massa del corpo; disposizione delle masse.

Caso frequente: una sola forza 'attiva', essendo l'altra forza della coppia una reazione vincolare. Esempio: corpo vincolato a ruotare su un asse mantenuto

[16] Si ricorda che i numeri complessi possono essere rappresentati in un piano cartesiano ('piano complesso') come un punto avente per ascissa la sua parte reale e per ordinata la sua parte immaginaria. Il modulo rappresenta quindi la distanza del punto dall'origine e la fase l'angolo formato fra il segmento congiungente punto-origine e l'asse delle ascisse. Modulo e fase sono quindi calcolati dalle usuali formule di geometria e trigonometria.

Valgono inoltre le seguenti regole pratiche: 1) il modulo di un prodotto o di un rapporto di n umeri complessi è pari, rispettivamente, a prodotto o rapporto dei moduli; 2) la fase di un prodotto o di un rapporto di n umeri complessi è pari, rispettivamente, a somma o differenza delle fasi.

fermo. Immaginiamo un disco libero di ruotare intorno al proprio asse. Momento del vettore forza:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \tag{605}$$

$$(M = r \cdot F \cdot \sin\theta) \tag{606}$$

(Nota: il concetto di 'momento' è applicabile, in principio, a qualsiasi vettore e va riferito rispetto ad un punto ('polo'): "momento del vettore forza rispetto all'origine", etc.)
La (606) si può riscrivere nel seguente modo:

$$M = F \cdot (r \sin\theta) = F \cdot r_\perp \,, \tag{607}$$

con $r_\perp$ proiezione di $\vec{r}$ perpedicolare alla direzione della forza, ovvero braccio della forza (b).
$\vec{M}_{tot} = \sum_i \vec{M}_i$ in quanto $F_{tot} = \sum_i \vec{F}_i$. Coppia rivista in termine di somma di momenti delle due forze: $M = F \cdot b$ indipendentemente dall'asse che si considera per calcolare i momenti. Regola della mano destra con le dita curvate verso l'interno del palmo (e della vite 'destorsa' che si avvita): se il verso di 'avvitamente' è quello della rotazione causata dalla forza, il momento è diretto, rispettivamente, lungo il pollice (verso l'unghia) o lungo l'asse della vite (verso la punta).
Unità di misura di momento della forza: Newton $\times$metro (N·m), vedi dati sui motori (es di scooter 150 cc: "coppia massima 14 N m a 7000 giri/min").
Momento delle forza e **momento della quantità di moto**: $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge (m\vec{v})$ $\rightarrow \vec{M} = \mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t$ (caso di polo o asse fisso, il solo che ci interessa in questo corso). $\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{L}_i$. Corpo che ruota: $\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{r}_i \wedge (m\vec{v})$: lungo l'asse di rotazione tutti i punti ruolano con stassa velocità angolare ω: ci concentriamo sul modulo (omettiamo tot): $L = \sum_i r_i m_i v_i = \sum_i r_i m_i r_i \omega = (\sum_i m_i r_i^2)\omega$ (se tutta la massa è alla stessa distanza dall'asse, es. ruota bicicletta, $L = (mr^2)\omega$). In genere bisogna fare la sommatoria o l'integrale sugli elementi di massa.
Continuiamo considerando M e L lungo un asse prefissato. da $M = \mathrm{d}L/\mathrm{d}t$, $\rightarrow M = \mathrm{d}/\mathrm{d}t[(\sum_i m_i r_i^2)\omega] = \mathrm{d}/\mathrm{d}t[I\omega] = I\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = I\dot{\omega}$ (se I fisso). Analogia con "$F = ma$": I acquista il ruola di 'coefficiente di inerzia': **Momento di inerzia**. Analogie fra moto traslazione (1-D per semplicità) e moto rotazionale intorno ad asse.

$$x \longleftrightarrow \theta \tag{608}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \longleftrightarrow \quad \omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{609}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} \quad \longleftrightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{610}$$

$$m \quad \longleftrightarrow \quad I \tag{611}$$

$$p = mv \quad \longleftrightarrow \quad L = I\omega \tag{612}$$

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = ma \quad \longleftrightarrow \quad M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = I\dot{\omega} \tag{613}$$

$$\mathrm{d}W = F\mathrm{d}x \quad \longleftrightarrow \quad \mathrm{d}W = M\mathrm{d}\theta \tag{614}$$

$$(W\text{: lavoro}) \tag{615}$$

$$P = F\,v \quad \longleftrightarrow \quad M\,\omega \tag{616}$$

$$E_c^{(trasl)} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \longleftrightarrow \quad E_c^{(rot)} = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{617}$$

$$F^{(ext)} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{tot} = cost \quad \longleftrightarrow \quad M^{(ext)} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{tot} = cost \tag{618}$$

31.3

Energia cinetica totale: $E_c^{tot} = E_c^{trasl} + E_c^{rot} = \frac{1}{2}m_{tot}v_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$.

31.4

Condizioni di equilibrio di un corpo rigido (da una condizione iniziale $\vec{v}_{CM} = 0$ e $\omega = 0$): devono essere nulla sia la risultante delle forze esterne che la risultante dei momenti delle forze:

$$\begin{cases} \vec{F}^{(ext)} = 0 \\ \vec{M}^{(ext)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{p} = \text{cost} \\ \vec{L} = \text{cost} \end{cases} \tag{619}$$

Caso speciale in cui ω può cambiare anche in assenza di momenti di forze esterne: $L = I\omega = k$, ma se I cambia, cambia anche ω per conservare L. **Esperimento sedia girevole**.

31.5

Problemi

1. Uno scooter ha una coppia massima di $14\,\mathrm{N{\cdot}m}$ a 7000 giri al minuto. Calcolare la potenza dello scooter a tale regime del motore.

2. Uno scooter ha una potenza massima di 11.8 HP a 8500 giri/min. calcolare la coppia a tale regime del motore.

3. Un corpo in rotazione intorno al proprio asse a 1000 giri al minuto ha una energia cinetica di rotazione pari a 1000 J. calcolare il momento di inerzia del corpo.

4. Una ruota di raggio $R = 30\,\mathrm{cm}$ e massa pari ad 1 kg è posta in rotazione il proprio asse ad una velocità tale che la ruota, lasciata libera al suolo, andrebbe ad una velocità di 40 km/h. Immaginando che tutta la massa della ruota sia concentrata a distanza R, calcolare l'energia cinetica della ruota.

5. Un corpo in rotazione intorno al proprio asse subisce un dimezzamento del momento di inerzia. Calcolare la variazione di velocità angolare.

6. Una barretta lunga $1\,\mathrm{m}$, con agli estremi due masse di $1\,\mathrm{kg}$ ciascuna ruota con una velocità angolare di $100\,\mathrm{s}^{-1}$. Improvvisamente le due masse sono avvicinate finché la loro distanza si dimezza. Calcolare la variazione di velocità angolare e la variazione di energia.

7. Una forza di intensità $(5, 0, 0)\,\mathrm{N}$ è applicata al punto $(0, 2, 0)\,\mathrm{m}$. Calcolare il momento della forza.

8. Un corpo ruota ad una velocità angolare di $10\,\mathrm{s}^{-1}$. Ad un certo istante il corpo è soggetto ad un'accelerazione angolare di $1\,\mathrm{s}^{-2}$ che dura 10 secondi. Trovare la velocità angolare finale.

9. Un corpo libero di ruotare intorno al proprio asse e inizialmente fermo è soggetto ad un'accelerazione angolare di $1\,\mathrm{s}^{-2}$ che dura 10 secondi. Calcolare la velocità angolare finale e la rotazione totale del corpo (sia in radianti che in gradi).

32 Giovedi 25/5, 18:00–19:00

32.1

Altri **esperimenti in aula**. Giroscopio: modulo, direzione e verso di L; momento della forza gravitazionale sul giroscopio; moto 'antiintuitivo' del giroscopio dovuto al fatto che, istante per istante, vale $\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M} \cdot \mathrm{d}t$, ovvero $\vec{L}(t + \mathrm{d}t) = \vec{L}(t) + \mathrm{d}\vec{L} = \vec{L}(t) + \vec{M} \cdot \mathrm{d}t$.

32.2

Calcolo del momento di inerzia di un disco rigido 'sommando' i contributi degli infiniti anelli concentrici di spessore infinitesimo $\mathrm{d}r$ posti a distanza r. Siccome ogni anello 'rettificato' è visto come un parallelepipedo di lati $2\pi r$ ('circonferenza rettificata'), $\mathrm{d}r$ e h (lo spessore del disco): $\mathrm{d}m = \rho \cdot 2\pi r h \mathrm{d}r$, con ρ la densità, ovvero $\mathrm{d}m = 2\pi\rho h r \mathrm{d}r$.

- Massa del disco

$$\int_0^R \mathrm{d}m \;=\; \int_0^R 2\pi\rho h r \mathrm{d}r = \rho\,\pi R^2\,h \tag{620}$$

  (densità × superficie × spessore).

- Momento di inerzia dell'anello a distanza r:

$$\mathrm{d}I = r^2 \mathrm{d}m = 2\pi\rho h r^3 \mathrm{d}r\,. \tag{621}$$

  Momento di inerzia dell'intero disco

$$\begin{aligned} I = \int_0^R \mathrm{d}I \;&=\; \int_0^R 2\pi\rho h r^3 \mathrm{d}r && (622)\\ &=\; \frac{1}{2}\,\pi\rho h R^4 = \frac{1}{2}\,M R^2\,. && (623)\end{aligned}$$

[Esercizietto extra: calcolare l'area di un cerchio di raggio R, considerando le aree degli infiniti anelli concentrici che lo costituiscono:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A \;&=\; 2\pi r\,\mathrm{d}r && (624)\\ A \;&=\; \int_0^R \mathrm{d}A = \int_0^R 2\pi r\,\mathrm{d}r = \pi\,R^2\,.] && (625)\end{aligned}$$

32.3

Applicazione dei momenti delle forze: leve (Asta rigida che ruota intorno ad un punto fisso detto *fulcro*). Momenti delle forze rispetto al fulcro condizione di equilibrio: $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$.

"*Datemi un punto di appoggio e vi solleverò la Terra!*"

Terminologia classica delle leve: (forza di) 'potenza' (P) e (forza di) 'resistenza' (R); 'braccio di potenza' (p) e braccio di resistenza (r); condizione di equilibrio ($r\,R = p\,P$, ovvero $P = R\,r/p$); classificazione delle leve in 'vantaggiosa' ($p > r$), 'svantaggiosa' ($p < r$) e indifferente ($p = r$). Tipi (o 'generi') di leve:

1^o) fulcro fra 'potenza' e 'resistenza': può essere vantaggiosa, svantaggiosa o indifferente a seconda della posizione del fulcro;

3^o) 'resistenza' fra fulcro e 'potenza' (es. carriola): è per definizione solo vantaggiosa, in quanto $p > r$;

3^o) 'potenza' fra fulcro e 'resistenza' (es. mollette e bicipiti): è per definizione solo svantaggiosa, in quanto $p < r$.

32.4

Esercizi

1. Un disco di 20 cm di diametro e 0.1 kg di massa è disposto orizzontalmente ed è libero di ruotare intorno al proprio asse. Esso ha, a 5 cm dal centro una piccola protuberanza (di massa trascurabile). Un proiettile di 50 g viene lanciato orizzontalmente ad una velocità 5 m/s e colpisce la pretuberanza in modo perpendicolare al raggio. Usando la conservazione del momento della quantità di moto trovare la velocità angolare finale del sistema disco-prioettile, sapendo che il disco era inizialmente fermo.

2. Un disco di ferro (densità 7.9 g/cm^3) di 30 cm di diametro, spessore 1 cm e densità 2 g/cm^3 è disposto orizzontalmente e ruota ad una velocità angolare di 500 giri/minuto. Un oggetto magnetizzato, di massa 200 g, viene fatto cadere verticalmente sul disco e rimane attaccato ad una distanza di 5 cm dal bordo. Calcolare la velocità finale del sistema ruotante.

33 Venerdi 26/5, 14:00–16:00

33.1

Fluidi: densità e pressione (Pascal, Pa). Legge di Stevino e legge di Pascal. Vasi comunicanti, manometro a mercurio, martinetto idraulico e barometro di Torricelli. Principio di Archimede.
Vedi dispense V. Ferrari, pp. 139-146

33.2

Esercizi

1. Una stanza è depressurizzata, ovvero tenuta ad una pressione inferiore del 20% rispetto alla pressione atmosferica. Calcolare la forza che agisce su una finestra alta 2 m e larga 1.2 m.

2. Un orologio è garantito fino a 10 atmosfere: fino a che profondità può essere immerso in acqua?

3. Si considerino due recipienti a sezione circolare. Il recipiente A ha un diametro di 20 m ed è alto 15 metri. Il recipiente B è semplicemente un tubo di diametro 4 cm e altezza 30 metri. In quale dei due recipienti c'è maggiore pressione sul fondo?

4. Un martinetto idraulico ha un cilindro di 30 cm e l'altro di 0.5 cm. In entrambi i cilindri, sopra il liquidi, sono disposti due pistoni che possono scorrere senza attrito. Sapendo che il liquido è in equilibrio e che pistone posto nel cilidro più stretto ha una massa di 100 g calcolare la massa dell'altro pistone.

5. Due vasi comunicanti (attraverso un foro posto nel fondo) contengono uno mercurio e l'altro acqua. Sapendo che il mercurio ha una densità di 13.3 g/cm^3, che la colonnina di mercurio è alta 76 cm e che i due liquidi sono in equilibrio, calcolare l'altezza della colonna di acqua.

6. Un pallone ad elio ha un diametro di 1 m. Assumendo la densità dell'elio trascurabile rispetto a quella dell'aria, calcolare la massa massima dell'involucro del pallone affinché esso riesca a volare.

7. Ad un pallone di calcio regolamentare, di massa 430 g e circonferenza 69 cm, viene legato un peso di 5 kg e gettato in acqua. Dire, giustificandone il motivo, se il pallone affonda o no.

8. Sapendo che la densità del ghiacchio di acqua pura è di 920 kg/m^3 e la densità dell'acqua marina ̀di 1025 kg/m^3, calcolare la frazione di volume di un iceberg che affiora dalla superficie del mare.

9. Approssimiamo una chiatta con un grosso parallelepipedo di lunghezza 20 m larghezza 6 m e altezza 4 metri. Sapendo che la parte immersa della chiatta è di 3 m, determinare il peso complessivo di chiatta, carico ed equipaggio.

34 Lunedi 29/5, 15:00–17:00

Esercitazioni