Fisica 1 per Informatici - Scritto 26/9/06 - Compito nr. 1

Soluzioni

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z = 4$.
Per quanto riguarda il prodotto vettoriale, esso vale in modulo $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$, ove il seno dell'angolo può essere calcolato dal coseno, ricavato a sua volta dal prodotto scalare e dai moduli dei vettori, ovvero $\cos\theta = \vec{a} \cdot \vec{b}/(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|) = 0.447$, da cui $\sin\theta = 0.894$ e quindi $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{b} \wedge \vec{a}| = 8$. Essendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sul piano xy, il prodotto vettoriale è lungo z. Infine, disegnando i due vettori sul foglio e usando una delle varie "regole delle dita", troviamo che $\vec{a} \wedge \vec{b}$ è diretto nel verso positivo dell'asse z, e quindi $\vec{b} \wedge \vec{a}$ nel verso opposto (regola di anticommutatività). Quindi, $\vec{a} \wedge \vec{b} = \{0, 0, 8\}$ e $\vec{b} \wedge \vec{a} = \{0, 0, -8\}$.
Ovviamente, usando invece la regola del determinante, questo risultato veniva ottenuto in modo molto più semplice e rapido:
$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\, 8 = \{0, 0, 8\}\,. \tag{1}$$

2. Per simmetria, il tempo di salita è pari a quello di discesa e quindi l'altezza raggiunta, pari ad $h = g\,(t/2)^2/2$ vale 19.6 m. Per trovare la velocità per $z = h/2$ usiamo il bilancio energetico $m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,\frac{h}{2}$, da cui $v = \sqrt{g\,h}\ [= g \cdot (t/2)/\sqrt{2}] =$ 13.9 m/s.

3. Per la conservazione della quantità di moto, $\Delta\vec{p}_B = -\Delta\vec{p}_A = \{-1, 4, -3\}$ kg m/s e quindi $\vec{p}_{B_{fin}} = \vec{p}_{B_{in}} + \Delta\vec{p}_B = \{0, 8, -6\}$ kg m/s.
Ne segue $\vec{v}_{B_{fin}} = \vec{p}_{B_{fin}}/m = \{0, 4, -3\}$ m/s, ovvero 5 m/s in modulo. L'energia cinetica finale vale quindi 25 J.

4. Dall'angolo in cui l'oggetto comincia muoversi otteniamo il coefficiente di attrito statico, in quanto $mg\sin\theta = \mu_s mg\cos\theta$, ovvero $\mu_s = \tan\theta$, pari a $1/\sqrt{3} = 0.577$ con i dati del problema. Quando il piano è orizzontale la condizione di 'stacco' è data da $k\,\Delta x = \mu_s mg$, da cui $\Delta x = \mu_s mg/k = 5.6$ mm.

5. La quantità di calore necessaria per fondere il ghiaccio e scaldare l'acqua (inclusa quella di fusione del ghiaccio) a 20 ^{o}C vale $\Delta Q = m_{ghiaccio}\lambda_{H_2O} + (m_{ghiaccio} + m_{acqua})c\Delta T =$ 400 kcal, ovvero il sistema assorbe un'energia E pari a $1.7\ 10^6 J$. Essendo la potenza fornita dalla resistenza $P = VI = 1012$ W, otteniamo $\Delta t = \frac{E}{P} = 1653\,\mathrm{s} = 27'\,33''$.

6. La velocità del nuotatore in piscina vale $v = 1.67$ m/s. Nel fiume essa vale, rispetto alla riva, $v + v_F$ e $v - v_F$ a seconda del verso di percorrenza, con v_F la velocità del fiume. Il tempo totale di percorrenza, vale quindi $L\,v/(v^2 - v_F^2) = 93.3$ s.

7. Essendo la forza di attrito $-\beta\,v$, da "$F = ma$", otteniamo $-\beta\,v = m\,a = m\,\frac{dv}{dt}$, ovvero $\frac{dv}{dt} = -\frac{\beta}{m}\,v$, che ha soluzione $v(t) = v_0\,e^{-t/\tau}$, con $\tau = m/\beta$.
Dal tempo t impiegato per passare da 30 a 20 k/m otteniamo $\tau = -t/\ln 20/30 = 100$ s.
1) Per passare da 20 a 10 km/h impiega quindi $t_{1/2} = \tau\ \ln 2 = 69$ s. 2) Dall'espressione di $v(t)$ ci ricaviamo, derivando, $a(t) = -v(t)/\tau$. Per $v = 30$ km/h, ovvero 8.33 m/s, otteniamo -0.083 m/s^2 (decelerazione). Per gli altri valori di velocità otteniamo -0.056 m/s^2 e -0.028 m/s^2

8. Essendo la forza centripeta pari alla forza di Lorentz otteniamo la relazione $\nu = \frac{qB}{2\pi m}$, da cui $B = \frac{2\pi\nu m}{q} = 1$T.

9. Si tratta di trovare il valore di resistenza per il quale si ha la 'soluzione critica' dell'oscillatore smorzato (vedi formulario). Per valori di resistenze inferiori si ha infatti la soluzione 'sottormorzata': $(\frac{R}{2L})^2 - (\frac{1}{LC}) < 0$, ovvero $R < 2\sqrt{L/C} = 0.9k\Omega$. Ne segue: $Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = 50$ e $\tau = 2/\gamma = 2\,L/R = 2.2\,\mathrm{ms}$

10. Dalla conservazione del momento della quantità di moto, $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$, ovvero $m\,r_1^2\omega_1 = m\,r_2^2\omega_2$, che possiamo riscrivere in funzione del periodo $m\,r_1^2/T_1 = m\,r_2^2/T_2$, da cui otteniamo $T_2 = T_1\,r_2^2/r_1^2$, ovvero $T_2 = T_1/4 = 0.2\,s$ con i dati del problema.
    Per quanto riguarda il lavoro compiuto (dobbiamo tirare la corda; provare!), esso è uguale alla variazione di energia cinetica: $L = \Delta E_c = \frac{1}{2}\,I_2\,\omega_2^2 - \frac{1}{2}\,I_1\,\omega_1^2 = 9.24\,\mathrm{J}$.