Esonero 6 Giugno 2003

1. Uno specchietto retrovisore è schematizzabile come uno specchio sferico convesso di raggio $R = 30\,\mathrm{m}$ Si calcoli dove si forma l'immagine di un'auto che dista $20\,\mathrm{m}$ dallo specchietto. Sapendo che l'auto è larga $l = 1.70\,\mathrm{m}$ trovare anche le dimensioni dell'immagine.

   Soluzione Con $p = 20\,\mathrm{m}$: $f = -R/2 = -15\,\mathrm{m}$; $q = pf/(p-f) = -8.57\,\mathrm{m}$; $G = -q/p = 0.42$: dimensioni trasverse dell'immagine $l' = G\,l = 0.72\,\mathrm{m}$.

   Soluzione con valore più realistico di R Usando $R = 2\,\mathrm{m}$, si ottiene $f = -1\,\mathrm{m}$; $q - 0.952\,\mathrm{m}$; $G = 0.048$; $l' = 0.081\,\mathrm{m}$.

2. Sul problema precedente: Sapendo che la distanza fra gli occhi dell'autista e lo specchietto è di $d = 60\,\mathrm{cm}$, calcolare il rapporto fra la larghezza della macchina e la distanza macchina-occhi. Calcolare lo stesso rapporto riferendosi all'immagine. Quanto vale la distanza apparente della macchina (ovvero quella che il cervello stimerebbe basandosi sulla larghezza presunta della macchina reale e non sapendo che lo specchio rimpicciolisce)?

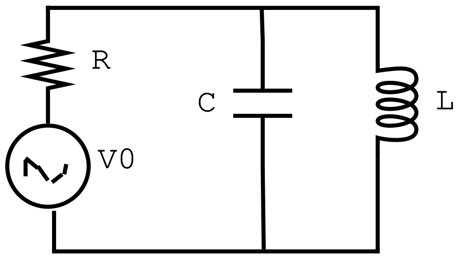
   Soluzione $\alpha = l/(p-d) = 0.088$; $\beta = l'/(p-q) = 0.079$: il cervello 'proietta' l'immagine dell'auto in unauto delle dimensioni reali ad una posizione tale che l'angolo di visione sia lo stesso $\rightarrow$ distanza apparente $l_{app} = l/\beta = 21.4$ (in questa soluzione non si fa uso delle trigonometria, ma delle proprietà dei triangoli simili). Osservazione: il rapporto α non è usato per calcolare la distanza apparente, ma serviva solo come suggerimento di quali fossero le grandezze in gioco.

   Soluzione con valore pù realistico di R (2 m) $\beta = 0.0052$; $l_{app} = 33\,\mathrm{m}$.

3. Il faro di una moto ha una potenza $P = 60\,\mathrm{W}$ e una efficienza luminosa di $\eta = 40\,\mathrm{lm/W}$. Esso irradia pressoché uniformemente in un cono di semiapertura $\theta = 18°$. Calcolare l'intensità luminosa del faro. Calcolare inoltre l'illuminazione prodotta dal faro, in assenza di riflessioni su un oggetto che si trova a $d = 20\,\mathrm{m}$.

   Soluzione $\phi = \eta\,P = 2400\,\mathrm{lm}$; $\Delta\Omega = 2\,\pi\,(1-\cos\theta) = 0.308\,\mathrm{sr}$; $I = \phi/\Delta\Omega = 7804\,\mathrm{cd}$; $E = \phi/A = \phi/(d^2\,\Delta\Omega) = 19.5\,\mathrm{lx}$.

4. Si consideri il circuito in figura, costituito da un generatore di tensione sinusoidale, una resistenza R

   da $200\,\Omega$, una capacità C da $500\,\mathrm{nF}$ e un'induttanza L da $10\,\mathrm{mH}$. Si calcoli l'espressione dell'impedenza totale del circuito in funzione della pulsazione ω. Per quale valore di ω è massimo il modulo dell'impedenza? Quanto vale la fase dell'impedenza per questo valore di ω?

   Soluzione $\vec{Z} = R + \vec{Z}_{LC}$, con $\vec{Z}_{LC} = \vec{Z}_L || \vec{Z}_C$.

$$\begin{aligned} \vec{Z}_{LC}^{-1} &= \frac{1}{j\,\omega\,L} + \frac{1}{1/j\,\omega\,C} = -j\frac{1}{\omega\,L} + j\,\omega\,C = j\left(\omega\,C - \frac{1}{\omega\,L}\right) \\ \vec{Z}_{LC} &= \frac{1}{j\,(\omega\,C - \frac{1}{\omega\,L})} = -j\frac{1}{(\omega\,C - \frac{1}{\omega\,L})}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Si ha il massimo di $\vec{Z}$ in corrispondenza del massimo di $\vec{Z}_{LC}$, ovvero quando il denominatore si annulla, da cui $\omega_\circ = 1/\sqrt{L\,C}$ (per $\omega \to 0$ e $\omega \to \infty$, $\vec{Z}_{LC} \to 0$). Nel limite $\omega \to \omega_\circ$, $\mathrm{Im}\,\vec{Z} = \mathrm{Im}\,\vec{Z}_{LC} \to -\infty$, ovvero $\phi \to -\pi/2$.

5. Si consideri di nuovo lo stesso circuito alimentato con una tensione efficace di 100 V di frequenza 2000 Hz. Si calcoli la potenza media erogata dal generatore.

Soluzione $\omega = 2\,\pi\,\nu = 1.26 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$; $Z_{LC} = 597\,\Omega$; $Z = \sqrt{R^2 + Z_{LC}} = 630\,\Omega$. Si può usare la formula $\overline{P} = V_{eff}\,I_{eff}\,\cos\phi$ in diversi modi, ricordando che veniva già data la tensione efficace e che $\cos\phi = R/Z$:

$$\overline{P} = V_{eff}\,I_{eff}\,\cos\phi = V_{eff}\,\frac{V_{eff}}{Z}\,\frac{R}{Z} = \frac{V_{eff}^2}{Z}\,\frac{R}{Z} = \frac{V_{eff}^2}{Z^2}\,R = \frac{100^2}{630^2}\,200 = 5.0\,\mathrm{W}\,.$$

In alternativa, il fattore di potenza $\cos\phi$ poteva essere ricavato direttamente dalla fase dell'impedenza: $\phi_Z = \arctan(\mathrm{Im}Z/\mathrm{Re}Z) = \arctan = -597/200 = -1.25\,\mathrm{rad} = -71.5°$, da cui $\phi \equiv \phi_I = -\phi_Z = -1.25\,\mathrm{rad} = -71.5°$ e $\cos\phi = 0.318$. Usando anche il valore esplicito di $I_{eff} = V_{eff}/Z = 0.159\,\mathrm{A}$, si ottiene $\overline{P} = 100 \times 0.159 \times 0.318 = 5.0\,\mathrm{W}$.

6. Due fili paralleli di 'lunghezza infinita' sono percorsi da corrente di intensità, rispettivamente, $i_1 = 1\,\mathrm{A}$ e $i_2 = 3\,\mathrm{A}$, distanti $d = 3\,\mathrm{cm}$. Le correnti hanno versi opposti. Calcolare la forza per unità di lunghezza che si esercita fra i fili. Supponiamo che i fili siano tenuti fermi, calcolare il modulo della forza che si esercita su una particella di carica elettrica $1.6\,10^{-19}$C che si trova a passare, parallela ai fili, con velocità 50000 km/s, in un punto distante d da entrambi i fili.

Soluzione

$$\begin{aligned} B_1 \equiv B^{i_1}(R=d) &= \frac{\mu\,i_1}{2\,\pi\,d} = 0.67 \times 10^{-5}\,\mathrm{T} \\ B_2 \equiv B^{i_2}(R=d) &= \frac{\mu\,i_2}{2\,\pi\,d} = 2.01 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

La forza repulsiva per unità di lunghezza fra i fili vale $F_u = \frac{\mu\,i_1\,i_2}{2\,\pi\,d} = 2.01 \times 10^{-5}\,\mathrm{N/m}$.
Il punto in cui passa la particella si trova fuori dal piano dei fili. Si nota come, nel piano ortogonale ai fili che passa per questo punto, le prioezioni dei fili e il punto sono ai vertici di un triangolo equilatero di lato d. I moduli dei campi magnetici prodotti dalle correnti nel punto di interesse sono esattamente B_1 e B_2 calcolati precedentemente, ma vanno sommati vettorialmente. Considerando i fili ortogonali al piano $x - y$ e intersecanti l'asse x, con i_1 a sinistra "uscente dal foglio", i_2 a destra "uscente dal foglio" e il punto di interesse posto 'sopra' i fili (ogni altra scelta, consistente con i dati del problema è da ritenersi buona), si ottiene:

- Le proiezioni di $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ lungo y sono positive e valgono rispettivamente e per la somma

$$\begin{aligned} B_{1_y} &= B_1 \sin 30° = 0.33 \times 10^{-5}\,\mathrm{T} \\ B_{2_y} &= B_2 \sin 30° = 1.00 \times 10^{-5}\,\mathrm{T} \\ B_y &= B_{1_y} + B_{2_y} = 1.33 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}\,. \end{aligned}$$

- La proiezione di $\vec{B}_1$ lungo x è negativa, mentre quella di $\vec{B}_2$ è positiva:

$$\begin{aligned} B_{1_x} &= -B_1 \cos 30° = -0.58 \times 10^{-5}\,\mathrm{T} \\ B_{2_x} &= B_2 \cos 30° = 1.74 \times 10^{-5}\,\mathrm{T} \\ B_x &= B_{1_x} + B_{2_x} = 1.16 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}\,. \end{aligned}$$

- Il campo totale ha modulo $B = 1.77 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$ e forma un angolo $\theta = \arctan B_y/B_x = 49.1°$ con l'asse x. Essendo la velocità della particella nel punto di interesse parallela ai fili, essa è normale al campo magnetico e quindi $F = q\,v, B = 1.41 \times 10^{-14}\,\mathrm{N}$.

7. Una spira di $10\,\mathrm{cm}^2$ è immersa in un campo magnetico di $1\,\mathrm{T}$, ortogonale al piano della spira. La spira ha una resistenza di $1\,\Omega$. Il campo magnetico viene spento facendolo variare linearmente dal suo valore iniziale a zero in un tempo Δt. Quanto deve essere il minimo di Δt affinché la corrente nella spira non superi $1\,\mathrm{A}$?

   Soluzione In flusso del campo concatenato con la spira vale inizialmente $\phi_0 = B\,A = 10^{-3}\,\mathrm{T\,m}$. Poichè ϕ varia linearmente nel tempo, $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\phi_0}{\Delta t}$. Prendendo il modulo (non siamo interessati al verso della corrente), otteniamo $i = \frac{1}{R}\left|\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{R}\frac{\phi_0}{\Delta t}$. La corrente è inversamente proporzionale al tempo di spegnimento. Affinchè i non superi $i_{max} = 1\,A$, deve valere la condizione $\Delta t > \frac{\phi_0}{R\,i_{max}} = 1\,\mathrm{ms}$.