

-Derivate e integrali. In genere, date le *generiche variabili* dipendenti dal tempo $y(t)$ e $x(t)$,

$$y = \frac{dx}{dt} \leftrightarrow dx = y dt \Rightarrow \Delta x|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} y(t) dt.$$

- Angolo piano e angolo solido

“rad = arco su raggio” $\rightarrow d\theta = ds/r$.

“sr = area calotta su raggio²” $\rightarrow d\Omega = dA/r^2$.

$\Rightarrow$ cono di semiapertura θ : $\Omega = 2\pi \cdot (1 - \cos \theta)$.

In genere, per dA non ortogonale alla ‘direzione di vista’: $d\Omega = dA \cdot |\hat{r} \cdot \hat{n}| / r^2$.

Dimensione angolare per piccoli angoli: ‘dimensione trasversa diviso la distanza’.

- Basi di cinematica:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{s}}{dt} \quad (\text{anche } \frac{d\vec{r}}{dt}) \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt}; \\ \Delta \vec{s}|_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt \\ \Delta \vec{v}|_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t) dt\end{aligned}$$

Inoltre :

$$\Delta \left(\frac{1}{2} v_x^2 \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} a_x(x) dx \quad \text{etc.}$$

- Eq. parametrica cerchio; **moto circolare:** velocità e accelerazione (anche delle componenti).

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \begin{cases} x(t) = R \cos[\theta(t)] \\ y(t) = R \sin[\theta(t)] \end{cases} \\ v(t) &= \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|; \quad a(t) = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|\end{aligned}$$

Moto circolare uniforme: $\theta(t) = \omega t$

Periodo: $t = T \Rightarrow \theta(t) = 2\pi$.

Frequenza (ν): giri/s. Vel. ang. (ω): rad/s.

$v(t)$ a $a(t)$ costanti in moto circ. uniforme.

$\vec{v}(t)$ sempre ortogonale a $\vec{r}(t)$ e a $\vec{a}(t)$.

- Leggi della meccanica

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{\vec{F}}{m} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F} \quad [\vec{p} = m\vec{v}] \\ \Delta \vec{p}|_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt \\ \vec{F}_A^{(B)} &= -\vec{F}_B^{(A)} \\ \vec{F}_A^{(tot)} &= \sum_i \vec{F}_A^{(i)}.\end{aligned}$$

• Sistema isolato: $\sum_i \vec{p}_i = \text{costante}$.

• Altrimenti:

$$\frac{d}{dt} (\sum_i \vec{p}_i) = \vec{F}^{(ext)} \rightarrow \frac{d}{dt} v_{CM} = \frac{\vec{F}^{(ext)}}{m_{tot}}.$$

- Forze (un inventario):

$$\begin{aligned}F_G &= -G \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad \left[G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \right] \\ &= -m_2 g \quad [\text{se } m_1 = M_T \text{ e } d = R_T] \\ &\quad [\Rightarrow g \approx 9.8 \text{ N/kg}] \\ F_C &= k_0 \frac{q_1 q_2}{d^2} \quad [k_0 = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2] \\ \vec{F}_G &= m \cdot \vec{g} \\ \vec{F}_E &= q \cdot \vec{E} \\ \vec{F}_L &= q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \\ F_{el} &= -k x \\ \vec{F}_{Ad} &= -\mu_d F_N \hat{v} \\ \vec{F}_{Av} &= -\beta \vec{v} \\ F_{As} &\leq \mu_s F_N \\ \vec{T}? \vec{F}_{As}? &\Rightarrow \text{‘vincoli’}.\end{aligned}$$

- Andamenti esponenziali (Nota: $\alpha > 0$)

con z generica variabile (temperatura, velocità, nr. di nuclei o di batteri, tensione condensatore, etc.)

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad \frac{dz}{dt} &= \alpha z \\ \Rightarrow z(t) &= z_0 e^{t/\tau} \quad [\tau = \frac{1}{\alpha}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad \frac{dz}{dt} &= -\alpha (z - z_F) \\ \Rightarrow z(t) &= z_F + (z_0 - z_F) e^{-t/\tau} \quad [\tau = \frac{1}{\alpha}]\end{aligned}$$

τ notevoli: m/β , C/η , RC , L/R

(ove le due ‘ C ’ sono ‘capacità’ di diverso tipo)

- Oscillatore armonico (con z generica variabile)

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) = -\omega^2 z(t) \iff z(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

con ω^2 di valore numerico positivo e *ovvie* dimensioni, con A e φ dipendenti dalle *condizioni iniziali*.

Se $z(0) = A_0$ e $\dot{z}(0) = 0 \Rightarrow z(t) = A_0 \cos(\omega t)$.

[Relazioni “*pulsaz.* $\leftrightarrow$ *periodo* $\leftrightarrow$ *freq.*”: $\Rightarrow$ da sapere.]

Casi notevoli:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{k}{m} x \quad (\text{molla}); \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} &\approx -\frac{g}{l} \theta \quad (\text{pendolo}).\end{aligned}$$

- **Trasformazioni di velocità:**

$$\vec{r}_{O'}(P) = \vec{r}_{O'}(O) + \vec{r}_O(P).$$

- **Lavoro, energia cinetica e potenziale. Potenza.**

$$\begin{aligned} dL &= \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ L|_A^B &= \int_A^B dL = \Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \Big|_A^B \equiv \Delta E_C|_A^B \\ [&= -\Delta E_p|_A^B \text{ solo } \vec{F} \text{ conserv.}] \\ F_x &= -\frac{dE_p(x)}{dx}, \text{ etc.} \\ P &= \frac{dL}{dt} \quad (\text{anche } P = \frac{dE}{dt} \text{ e } P = \frac{dQ}{dt}) \end{aligned}$$

- **Energia potenziale e potenziale** (grav. e elettr.)

$$\Delta E_p|_A^B = m \cdot \Delta V_G|_A^B \iff \Delta E_p|_A^B = q \cdot \Delta V|_A^B$$

$$\text{Percorso chiuso: } \sum_i \Delta E_{p_i} = 0.$$

- **Forza $\leftrightarrow$ En. Pot. $\iff$ Campo $\leftrightarrow$ Potenziale**
(caso elettrostatico, unidimensionale)

$$\begin{aligned} \Delta E_p|_{x_1}^{x_2} &= -\int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \iff \Delta V|_{x_1}^{x_2} = -\int_{x_1}^{x_2} E(x) dx \\ F(x) &= -\frac{dE_p(x)}{dx} \iff E(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \end{aligned}$$

Caso particolare di forza costante:

$$\Delta E_p|_{x_1}^{x_2} = -F \cdot \Delta x \iff \Delta V|_{x_1}^{x_2} = -E \cdot \Delta x.$$

$$\text{Inoltre, da } \sum_i \Delta E_{p_i} = 0 \text{ segue } \sum_i \Delta V_i = 0.$$

- **Zero (convenzionale) del potenziale**

- Per come sono introdotti, E_p e V sono definiti a meno di una costante additiva;
- per le forze che vanno come $1/r^2$ è di *norma* conveniente porre lo zero del potenziale all'infinito $\Rightarrow$ potenziale alla distanza r da Q :

$$\begin{aligned} V(r) - V(\infty) &= \Delta V|_{\infty}^r = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ V(r) &= \frac{k_0 Q}{r}, \end{aligned}$$

da cui segue en. pot. E_p di q posta alla distanza r :

$$E_{p_q}^{(Q)}(r) = q \cdot V^{(Q)}(r) = \frac{k_0 q Q}{r},$$

avendo esplicitato il fatto che $V(r)$ è dovuto a Q .
Infine, **campi e potenziali sono additivi**.

- **Centro di massa** ('baricentro'):

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \\ \vec{v}_{CM} &= \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} \\ \vec{F}_{tot}^{ext} &= \frac{dP_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i. \end{aligned}$$

- **Urti**: $\rightarrow$ conservano quantità di moto.

a) perfett. elastici: $\rightarrow$ conservano energia meccanica.

b) complet. anelastici: $\rightarrow$ si annulla E_c nel C.M.

- **Nota**, per urti perfett. elastici collineari: cons. q. di moto e cons. $E_C \rightarrow$ regola della somma delle velocità, ovvero regola della inversione delle velocità relative.

- **Onde progressive** (regressive: ' $-\beta x$ ' $\rightarrow$ ' $+\beta x$ ')

- equazione: $f(x, t) = A \cos(\omega t - \beta x)$;

- periodicità: $T = 2\pi/\omega$; $\lambda = 2\pi/\beta$.

- velocità: $v = \omega/\beta = \lambda/T$

$$\rightarrow \lambda \cdot \nu = v; \quad \lambda = v \cdot T.$$

Note: spesso al posto di β si usa k .

- **Equazione di d'Alembert**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

valida per generica $f(x, t) = g_1(x - vt) + g_2(x + vt)$.

- **Fotometria**:

$$\eta : \text{'lm/W'}$$

$$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm} / 1 \text{ m}^2 \text{ (illuminamento)}$$

$$1 \text{ cd} = 1 \text{ lm} / 1 \text{ sr} \text{ (intensità luminosa)}$$

$$\text{sr} \rightarrow \text{'estensione del radiante allo spazio'}$$

$$Q_v : \text{ ("quant. di luce") : lm} \times \text{s ("Talbot")}$$

- **Corpo nero**

Leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien

$$\frac{P}{A} = \sigma T^4$$

$$\lambda_{max} \cdot T = 2.90 \times 10^{-3} \text{ K m}$$

ove $\sigma \approx 5.7 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$

- **Termometria** (qui Q indica quantità di calore):

$$Q = C \Delta T \quad (\text{ove } C = c \cdot m)$$

$$\sum_i Q_i = 0 \quad (\text{sistema isolato})$$

$$1 \text{ cal} = 4.184 \text{ J}$$

$$\lambda_{H_2O} = 80 \text{ cal/g (fusione)}$$

$$= 540 \text{ cal/g (ebollizione)}$$

- **Fluidi:**

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (P \cdot A) \hat{n} \\ \frac{dP}{dz} &= \rho g \quad (z > 0 \text{ verso il basso}) \\ \Delta P &\rightarrow \text{si trasmette a tutto il fluido} \\ F_{Arch.}^{\uparrow} &= \rho_f V_{f.s.} g \\ v \cdot A &= \text{costante} \quad [\text{'Leonardo'}] \\ P + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 &= \text{costante} \quad [\text{'Bernoulli'}]\end{aligned}$$

- **Gas perfetti** (1 mol $\equiv 6.02214076 \times 10^{23}$ 'entità elem.'):

$$\begin{aligned}PV &= nRT \left[R = 8.31 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} \right] \\ L^{(dal \text{ gas})} &= P \Delta V \\ \Delta E_{int} &= Q^{(al \text{ gas})} - L^{(dal \text{ gas})}\end{aligned}$$

- **Momenti di forze e di quantità di moto:**

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r} \wedge \vec{F} \quad \left[\vec{M}_{tot} = \sum_i \vec{M}_i \right] \\ \vec{L} &= \vec{r} \wedge \vec{p} \quad \left[\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{L}_i \right] \\ \vec{M}^{(ext)} = 0 &\implies \vec{L} = \text{cost}\end{aligned}$$

- **Velocità aereolare:**

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{v} = \frac{1}{2m} \vec{L}$$

- **Corpo rigido:**

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad [= \sum_i I_i] \rightarrow \int dI$$

In particolare, corpo rigido ruotante **intorno ad un asse fisso**:

$$\begin{aligned}x &\leftrightarrow \theta \\ v = \frac{dx}{dt} &\leftrightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt} \\ a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} &\leftrightarrow \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ m &\leftrightarrow I \\ a = \frac{F}{m} &\leftrightarrow \dot{\omega} = \frac{M}{I} \\ p = mv &\leftrightarrow L = I\omega \\ F = \frac{dp}{dt} = ma &\leftrightarrow M = \frac{dL}{dt} = I\dot{\omega} \\ \dots\dots\dots &\leftrightarrow \dots\dots\dots\end{aligned}$$

- **Ottica geometrica:**

Riflessione: $\theta_i = \theta_r$;
Legge di Snell: $n_1 \cdot \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$;
(in entrambi i casi: $\vec{i}$, $\vec{n}$, $\vec{r}$ planari).
Punti coniugati specchi sferici e lenti:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$

Distanze focali di specchi sferici e lenti:

$$\begin{aligned}f &= \pm \frac{R}{2} \quad (\text{concavo/convesso}); \\ \frac{1}{f} &= (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).\end{aligned}$$

(Si presti attenzione alle *convenzioni dei segni*.)

Ingrandimento lineare: $M = -q/p$.

- **Fotocamera:**

- apertura angolare: $\alpha = 2 \arctan((L/2)/f) \approx L/f$.
- 'numero di diaframma': $n_D = f/D$
- reciprocità $T/n_D^2 = \text{cost.}$ a parità di illum. e ISO.
- sensibilità: se ISO raddoppia è sufficiente $Q_v/2$;
da cui $T/n_D^2 \times \text{ISO} = \text{cost.}$

- **Onde progressive (nelle regressive “ $+\beta x$ ”):**

- equazione: $f(x, t) = A \cos(\omega t - \beta x)$;
- periodicità: $T = 2\pi/\omega$; $\lambda = 2\pi/\beta$.
- velocità: $v = \omega/\beta = \lambda/T \rightarrow \lambda \cdot \nu = v$.

- **Circuiti in corrente continua (c.c.)**

Generatore di tensione:

$$V^{(+)} - V^{(-)} \equiv f.$$

Legge di Ohm, leggi di Kirchhoff, effetto Joule:

$$\begin{aligned}I &= \frac{dQ}{dt} \\ I_{A \rightarrow B} &= \frac{V_A - V_B}{R_{A \leftrightarrow B}} \Rightarrow “I = \frac{\Delta V}{R}” \\ R &= \rho \frac{l}{A} \quad (\text{conduttore cilindrico}) \\ \sum_i I_i &= 0 \quad (\text{nodi}) \\ \sum_i \Delta V_i &= 0 \quad (\text{maglie}) \\ P &= I \cdot \Delta V = \dots = \dots \dots\end{aligned}$$

Resistenze in serie e in parallelo:

$$\begin{aligned}R_s &= \sum_i R_i \\ R_p^{-1} &= \sum_i R_i^{-1}.\end{aligned}$$

- **Condensatori e circuiti con f** (costante), **R** e **C**
(→ ‘carica e scarica del condensatore’)

$$V_C \equiv \Delta V = \frac{Q}{C} \quad \left[\Longleftrightarrow \Delta T = \frac{Q}{C} \text{ (calorimetria)} \right]$$

Energia del condensatore: $\frac{Q \cdot V_C}{2} = \dots = \dots$

Parallelo e serie: $C_p = \sum_i C_i$; $C_s^{-1} = \sum_i C_i^{-1}$.

Semplici circuiti con f , R e C :

→ stesse regole (“Ohm e Kirchhoff”) dei circuiti in c.c.,
con $I(t)$, $Q(t)$ e $V_C(t)$ [e $V_R(t)$] dipendenti dal tempo,
con $I = dQ/dt = C dV_C/dt$;

→ danno luogo a equazione differenziale riscrivibile
nella forma *canonica* che dà luogo ad andamenti
esponenziali.

Analogie notevoli:

→ andamento nel tempo della termalizzazione;

→ velocità limite nel caso di forze del tipo $-\beta \vec{v}$.

- **Inferenza e previsione probabilistica**

$$P(H_i | E_{obs}, I) \propto P(E_{obs} | H_i, I) \cdot P(H_i | I)$$

$$P(E_{pr} | I) = \sum_i P(E_{pr} | H_i, I) \cdot P(H_i | I)$$

Estensione alle distribuzioni di probabilità, con π
generico parametro e x un *valore osservato* (‘dato’) o
osservabile (→ previsione):

$$f(\pi | x, I) \propto f(x | \pi, I) \cdot f(\pi | I)$$

$$f(x | I) = \int_{\mathcal{D}(\pi)} f(x | \pi, I) \cdot f(\pi | I) d\pi$$

ove le ‘ $f()$ ’ sono generiche funzioni di probabilità
o pdf, matematicamente diverse anche se indicate con
stesso simbolo, e ‘ $\mathcal{D}(\pi)$ ’ sta per il dominio di π .

Casi notevoli di inferenza parametrica

(da *prior uniforme*):

$$(\mathbf{x}, \sigma) \longrightarrow \mu \sim \text{Norm}(\bar{x}, \sigma/\sqrt{n})$$

$$n \longrightarrow \lambda \sim \text{Gamma}(n+1, 1)$$

$$(n, x) \longrightarrow p \sim \text{Beta}(x+1, (n-x)+1)$$

⇒ dettagli su app *Probability Distributions*

(può essere usata, sotto controllo, all’esame, anche orale)

- **Propagazione di varianze** (di X_i indep.)

$$Y(\mathbf{X}) = \sum_i c_i \cdot X_i \longrightarrow \sigma^2(Y) = \sum_i c_i^2 \cdot \sigma^2(X_i)$$

Linearizzazione: i coefficienti c_i sono ottenuti
espandendo $Y(\mathbf{X})$ al primo ordine intorno a $E(\mathbf{X})$.

- **Propag. di incertezze relative** (di X_i indep.)

Data una *funzione monomia* $Y(\mathbf{X}) = \prod_i X_i^{\alpha_i}$,

con $r_{X_i} = \sigma(X_i)/E(X_i)$, etc. :

$$r_Y^2 \approx \sum_i \alpha_i^2 \cdot r_{X_i}^2.$$

- **Costanti varie**

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$$

$$k_0 = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{C}^{-2} \cdot \text{m}^2 \approx 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{C}^{-2} \cdot \text{m}^2$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \cdot \text{C}^2 \cdot \text{m}^{-2}$$

$$q_e = -1 e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg} \approx 1836 \times m_e$$

$$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$