Formulario del corso ‘Fisica I: Meccanica e Teoria della Misura’

tenuto dal Professor Giulio D’Agostini (CdL Informatica AA 2001/2002).

Nota del redattore: questo breve formulario NON ha assolutamente la pretesa di essere esaustivo, è semplicemente un “concentrato” delle formule che sono state illustrate a lezione. Deve essere visto non come materiale idoneo per la propria preparazione, ma come un promemoria per la risoluzione degli esercizi. Infatti sono stati omessi i passaggi che necessitano conoscenze teoriche, in quanto si assume che chi sta preparando l’esame sia in possesso degli appunti: questo formulario NON completa gli appunti, li filtra…

Cinematica e dinamica

Velocità: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Velocità istantanea: $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

Velocità non costante: $\Delta s = v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \ldots = \sum v_i \Delta t_i$

Variazioni continue:

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt + s_0$$

Accelerazione:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Moto uniformemente accelerato:

$$a = k$$

$$v = at + v_0$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

Velocità: $\begin{array}{l} \Delta v = a\Delta t \\ \Delta v = a_1\Delta t_1 + a_2\Delta t_2 + \ldots = \sum_i a_i \Delta t_i \rightarrow \int a(t)dt \end{array}$

Vettori

$\vec{r} = (r_x, r_y)$

$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$

$\vec{R} = (R_x, R_y) = (r_{1x} + r_{2x}, r_{1y} + r_{2y})$

Vettore per scalare: $\begin{array}{l} \vec{v}k = (kv_x, kv_y, kv_z) \\ |\vec{v}k| = \sqrt{k^2v_x^2 + k^2v_y^2 + k^2v_z^2} = |k||\vec{v}| \end{array}$

Prodotto scalare: $\vec{v}_1\vec{v}_2 = |\vec{v}_1||\vec{v}_2|\cos\theta = v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z}$

Prodotto vettoriale: $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = |\vec{v}_1||\vec{v}_2|\sin\theta\hat{n} = (v_{1y}v_{2z} - v_{1z}v_{2y}, v_{1z}v_{2x} - v_{1x}v_{2z}, v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x})$

Principi della dinamica:

1- Un oggetto persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se non è soggetto a forze.
2- F=ma (a=F/m)
3- A ogni azione corrisponde una reazione uguale e col segno contrario.

Legge di gravitazione universale: $|F_G| = G\frac{m_1m_2}{R^2}$

Moto circolare a velocità costante: $\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{v}| = \omega R \\ \vec{a} = -\omega^2 R, |\vec{a}| = \omega^2 R = v^2/R \end{cases} \Rightarrow \{A\cos(\omega t + \varphi)\}$

Leggi di Keplero:

1 – Traiettorie ellittiche, (sole è uno dei fuochi).

2 – Velocità aureolare costante.

3 – Il cubo dell'asse maggiore è proporzionale al quadrato del periodo.

Molla:

$$F_m \propto L \propto mg; F_{m_0} = kL_0; l = L_0 - x; F_m = kL = kL_0 - kx = -kx; ma = -kx; a = -\frac{k}{m}x; \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; x = \Delta x \cos\omega t$$

Pendolo:

$$F_p = mg; T_R + F_{P_R} = 0; T_R + mg\cos\theta = 0; -mg\sin\theta = ma_T = m\frac{d^2 s}{dt^2}; \theta = \frac{s}{l} \Rightarrow s = \theta l; l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin\theta = 0;$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0; \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0; \theta = \theta_0\cos\omega t; s = s_0\cos\omega t$$

Attrito statico: $N = -mg;\ f_a \leq f_{\max} \Rightarrow f_T = -f_a;\ f_T = \mu_S N;\ f_a \leq \mu_S N; \mu_S \geq \frac{f_a}{N} = tg\alpha$

$$\theta_a = arctg\mu_S; \mu_S = tg\theta_a; tg\alpha \leq tg\theta_a$$

Attrito cinematico: $f_T = \mu_C N$

Mezzi viscosi:

$$\vec{F} = -\beta\vec{v}; \beta v = mg; \beta = \frac{mg}{v}; ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt}; m\frac{dv}{dt} = -\beta v; \frac{dv}{dt} = -\frac{\beta}{m}v; \frac{dv}{v} = -\frac{\beta}{m}dt \Rightarrow v(t) = v_0 e^{-t/\mathrm{T}}$$

Sistemi relativi: $\begin{cases} \vec{r}(s) = k \\ \vec{v}' = \vec{v} \\ \vec{a}' = \vec{a} \end{cases} \begin{cases} \vec{v}(s) = k \\ \vec{v}' = \vec{v}(s) + \vec{v} \\ \vec{a}' = \vec{a} \end{cases}$

Quantità di moto:

$$a = \frac{F}{m}; \Delta t a = \frac{F}{m}\Delta t; \Delta v = \frac{F}{m}\Delta t; m\Delta v = F\Delta t; \Delta p = F\Delta t; F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{dp}{dt}$$

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B; \Delta\vec{p}_A = -\Delta\vec{p}_B; \Delta\vec{p}_A + \Delta\vec{p}_B = 0; \vec{p}_{tot}(t) = m_1\vec{v}_1(t) + m_2\vec{v}_2(t) + \ldots = \vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) + \ldots = Cost$$

Centro di massa: $\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i \vec{r}_i(t) m_i}{\sum_i m_i}; \frac{dx_{CM}(t)}{dt} = \frac{m_1 v_{x1}(t) + m_1 v_{x2}(t) + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{p_{xtot}}{m_{tot}} = Cost$

Lavoro come variazione di energia cinetica:

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}\Delta t^2; \Delta x = v_0 \Delta v \frac{m}{F} + \frac{1}{2}\frac{m}{F}\Delta v^2 \Rightarrow F\Delta x = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \sum_i F_i \Delta x_i = \sum_i L_i = \int_{x_0}^{x_f} F(x)dx = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \Delta E_C$$

$$L_{tot} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} \Rightarrow L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \Delta E_C$$

Se il lavoro su un ciclo è 0 $\Rightarrow$ forza conservativa

Energie potenziali:

Molla:

$$F(x) = -kx; L\Big|_0^{\Delta x} = \int_0^{\Delta x} F(x)dx = -\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \Delta E_C \Rightarrow -\frac{1}{2}k\Delta x^2 = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

$$L = \Delta E_C = -\Delta E_P; \Delta E_P\Big|_0^{\Delta x} = -L\Big|_0^{\Delta x} = -\int_0^{\Delta x} F(x)dx \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2} m v^2(x) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Gravitazionale:

$$F = -\frac{GMm}{R^2} \Rightarrow \Delta E_P\Big|_{R_1}^{R_2} = -L\Big|_{R_1}^{R_2} = -\int_{R_1}^{R_2}\left(-\frac{GMm}{R^2}\right)dR = GMm\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Delta E_p\Big|_{R_1}^{R_2} \xrightarrow{R_1 \to 0} +\infty \Rightarrow \Delta E_p\Big|_{R_1}^{R_2} = -\frac{GMm}{R^2} - \left(-\frac{GMm}{R_1}\right) \Rightarrow E_P(R) = -\frac{GMm}{R}$$

Equivalenza: $E_P = -\frac{GMm}{R_0 + h} = -\frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{R_0^2} h = E_P(R_0) + mgh$

Pendolo:

$$E_P = mgh = mgl(1 - \cos q); E_{tot} = mgl(1 - \cos q_0); \frac{1}{2} m v^2 + mgl(1 - \cos q) = mgl(1 - \cos q_0)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgl q^2 = \frac{1}{2} mgl q_0^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \frac{g}{l} s^2 = \frac{1}{2} m \frac{g}{l} s_0^2 \Rightarrow w^2 = \frac{g}{l}$$

Forza da energia potenziale:

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx + U(x_0) \Rightarrow F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

Potenza: $W = \frac{L}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \vec{F}\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$

Urti:
$$v_1^1 = v_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{rel}$$
$$v_{21}^1 = v_{CM} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{rel}$$

Urto caso $m_1 = m_2 = m$:
$$v_1^1 = v_2$$
$$v_2^1 = v_1$$

Urto caso $m_1 = \alpha m_2$; $v_1 = v$; $v_2 = 0$
$$v_1^1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} v$$
$$v_2^1 = \frac{2\alpha}{\alpha + 1} v$$

Teoria della Misura

Probabilità: definizione combinatoria (eventi equiprobabili): $p = \dfrac{\#casi\_favorevoli}{\#casi\_possibili}$

Moda: valore più frequente

Mediana: valore centrale del sort dei valori (media tra centrali se n dispari)

Media: $\overline{x} = \dfrac{\sum_i x_i}{n}$

Se abbiamo i dati raggruppati in classi:

$$w_k = f_k = \frac{n_k}{\sum_k n_k} = \frac{n_k}{n}$$

$$\overline{x} = \sum_k f_k x_k$$

$$Varianza = s^2 = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

$$Deviazione\_STandard = s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

$$s^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

$$skewness = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^3}{s^3 n} = \frac{\overline{x^3} - 3\overline{x^2}\,\overline{x} + 2\overline{x}^2}{s^2}$$

$$kurtosis = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^4}{s^4 n} = \frac{\overline{x^4} - 4\overline{x^3}\,\overline{x} + 6\overline{x^2}\,\overline{x}^2 - 3\overline{x}^4}{s^4}$$

Assiomi della probabilità:

1) $0 \le P(E) \le 1$
2) $P(\Omega) = 1$; $P(\Phi) = 0$
3) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ se $E_1 \cap E_2 = \Phi$

Proprietà derivate:

1) $P(E)=1-P(\overline{E})$

2) $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\overline{A})$

3) Se $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\subseteq P(B)$

4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

5) $P(A\,|\,B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ $\qquad P(B\,|\,A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$$P(A\cap B)=\begin{matrix}P(A|\,B)P(B)\\ P(B\,|\,A)P(A)\end{matrix}$$

$P(A\,|\,B)=P(A)$ se A e B indipendenti $\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$

Distribuzione binomiale:

$$f(x)=P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$\begin{cases}\overline{x}=np\\ \boldsymbol{s}=\sqrt{np(1-p)}\end{cases}$$

$\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{s}}{|\overline{x}|}$ incertezza relativa

$$E\left[\frac{x}{n}\right]=E[f_n]=p$$

$$\boldsymbol{s}(f_n)=\frac{\boldsymbol{s}(x)}{n}=\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

$f_n = p\pm\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ Th Bernoulli

$f(x)=\dfrac{dP}{dx}$ densità di probabilità

$$\sum_{x=0}^{n}f(x)=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Distribuzione uniforme: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{b-a} \\ E[x] = \dfrac{a+b}{2} \\ \sigma = \dfrac{b-a}{\sqrt{12}} \end{cases}$

$$F(x_k) = P(X \le x_k) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_k) = \sum_{x_i \le x_k} f(x_i)$$

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$P(x \le X \le x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$$dF = f(x)dx$$

Passaggio al continuo

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$\begin{cases} \overline{x} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \\ \sigma^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{x})^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \overline{x}^2 \end{cases}$$

Distribuzione di Gauss:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\begin{cases} E[x] = m \\ \mathrm{var}(x) = s^2 \end{cases}$$

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2p}\, s} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}} dx$$

$$z = \frac{x-m}{s}$$

$$P(m - s \le X \le m + s) \leftrightarrow P(-1 \le Z \le +1)$$

Combinazione lineare di variabili casuali indipendenti

$$Y = \sum_i^n c_i X_i$$

Proprietà:

$$\begin{cases} E[Y] = \sum_i^n c_i E[X_i] \\ Var(Y) = \sum_i^n c_i^2 Var(X_i) \end{cases}$$

Th centrale del limite: se n è grande (“ $\to \infty$ ”) e nessuna componente non gaussiana domina le fluttuazioni ($c_i^2 Var(X_i) << \sum_i^n c_i^2 Var(X_i)$) f(Y) è approssimativamente normale:

$$Y \approx N\left(\sum_i c_i m, \left(\sum_i c_i s_i^2 \right)^{1/2} \right)$$

$$\overline{x_n} = \frac{1}{n} \sum_i X_i$$

$$E[\overline{X_n}] = E[X]$$

$$s(\overline{X_n}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$

Errore: $e = \sum_i e_i$

Th Bayes: $P(H_i \mid E) = \dfrac{P(E \mid H_i) P(H_i)}{\sum_i P(E \mid H_i) P(H_i)}$

$$f(p\,|\,x,n)=\frac{f(x\,|\,n,p)\,f_0(p)}{\int_0^1 f(x\,|\,n,p)f_0(p)dp}\Rightarrow\begin{cases}E[p]=\int_0^1 pf(p)dp\\ \sigma^2(p)=\int_0^1 (p-E[p])^2 f(p)dp\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_{\max}=E[p]=\dfrac{x}{n}\\ \sigma=\dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{n}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)}}{\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{p_m(1-p_m)}}{\sqrt{n}}\end{cases}$$

Misure

$$f(m\,|\,x)=f(x\,|\,m)f(m)\Rightarrow\begin{cases}E[m]=x\\ \sigma(m)=\sigma\end{cases}$$

Estendendo a tante misure:

$$f(m\,|\,x_1,x_2,\ldots,x_n)\Rightarrow\begin{cases}E[m]=\bar{x}\\ \sigma(m)=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\end{cases}\Rightarrow f(m,\sigma\,|\,\underline{x})$$

Fit

$P(f_n\,|\,\underline{(x,y)})\propto L(\underline{(x,y)}\,|\,f_n)\Pi(f_n)$ soluzione generale Bayesiana

$y=f(x\,|\,\theta)$ soluzione Bayesiana parametrica

$f(\theta\,|\,\underline{(x,y)})\propto L(\underline{(x,y)}\,|\,\theta)\Pi(\theta)$

Modello lineare: y=mx+c

$$\begin{cases}c=\bar{y}-m\bar{x}\\ m=\dfrac{\overline{xy}-\bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2}\end{cases}$$

Casi:

1 - σ costante (così)

2 - σ non costante (stesse formule, medie pesate su $\dfrac{1}{\sigma_i^2}$)

3 - σ costante ignota $\begin{cases}E[m]=\bar{x}\\ \sigma(m)=\sqrt{\dfrac{\sum_i (x_i-\bar{x})^2}{n-1}}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\end{cases}$ $\begin{cases}r_i=y_i-y(x_i;m,c)\\ \sigma^2=\dfrac{\sum_i r_i^2}{n-2}\end{cases}$

4 – incertezze

$$\begin{cases}E[m]=\dfrac{\overline{xy}-\bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2}\\ E[c]=\bar{y}-E[m]\bar{x}\end{cases}\quad\begin{cases}\sigma(m)=\dfrac{1}{\sqrt{\overline{x^2}-\bar{x}^2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{Var(x)}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\\ \sigma(c)=\sqrt{\overline{x^2}}\,\sigma(m)\end{cases}$$

$$Cov=\frac{(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n}$$

$$\boldsymbol{r}(x,y)=\frac{Cov(x,y)}{\boldsymbol{s}(x)\boldsymbol{s}(y)}=\frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}}$$

$$Var=\frac{\sum_i (x_i-\bar{x})^2}{n}\rightarrow\overline{x^2}-\bar{x}^2$$

$$Cov=\frac{\sum_i (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n}\rightarrow\overline{xy}-\bar{x}\bar{y}$$

$$m=\frac{Cov(x,y)}{Var(x)}$$

Propagazione incertezze: $\boldsymbol{s}^2(Y)=\sum_i\left(\frac{\partial Y}{\partial X_i}\right)\boldsymbol{s}_i^2$

Caso monomio: $Y=KX_1^{a_1}X_2^{a_2}\ldots$

r: incertezza relativa $\quad r^2(Y)=\sum_i \boldsymbol{a}_i^2 r^2(X_i)$