Soluzione Esonero 6 Novembre 2001

Le soluzioni sono date per "problema tipo". Sta allo studente calare tale soluzione nel problema specifico (ad esempio, i punti A e B possono essere città, stazioni ferroviarie , etc; il "natante" può essere un nuotatore, una barca, o anche un aerostato, e così via).
Viene illustrata la soluzione più semplice e più "fisica", anche se sono possibili altre soluzioni (valide per il superamento dell'esame!) più formali o comunque "automatiche".
Essendo questo un esonero essenzialmente su cinematica più "$F = m\,a$", non è invece consentito l'uso dei concetti di lavoro, energia cinetica e potenziale per la soluzione dei problemi.

1. Il prodotto scalare può essere calcolato

   (a) dalle componenti, come $s = v_{1_x} \cdot v_{2_x} + v_{1_y} \cdot v_{2_y} + v_{1_z} \cdot v_{2_z}$;

   (b) da moduli e angolo fra i vettori, come $s = |v_1| \cdot |v_2| \cdot \cos\theta$, ove $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

   Ne segue
   $$\cos\theta = \frac{v_{1_x} \cdot v_{2_x} + v_{1_y} \cdot v_{2_y} + v_{1_z} \cdot v_{2_z}}{|v_1| \cdot |v_2|}\,,$$
   da cui θ.
   Se è richiesto di dire soltanto se l'angolo è acuto, ottuso o retto (foglio 1b), è sufficiente considerare se $s > 0$, $s < 0$ o $s = 0$, in quanto $s \propto \cos\theta$.

2. Indicando positivo il verso che va dal punto A al punto$B$ e chiamando v_A e v_B le velocità dei veicoli che partono dai punti rispettivi (quest'ultima è quindi negativa), otteniamo che la velocità relativa vale $v_A - v_B$ e quindi i veicoli si incontreranno dopo $T = \overline{AB}/(v_A - v_B)$. Nell'istante dell'incontro i veicoli si troveranno ad una distanza $T \cdot v_A$ da A e a $T \cdot |v_B|$ da B.

3. Indicando con F il fiume (di larghezza L), con N il natante e con R la riva, abbiamo
   $$\begin{aligned} \vec{v}_R(F) &= (v_F, 0) \\ \vec{v}_F(N) &= (0, v_N)\,, \end{aligned}$$

da cui $\vec{v}_R(N) = (v_F, v_N)$. Ne segue che modulo e angolo della velocità rispetto alla riva sono $v_R = \sqrt{v_F^2 + v_N^2}$ e $\theta = \arctan(v_N/v_F)$.
Nel tempo $T = L/v_N$ con il quale viene attraversato il fiume, il natante percorre, rispetto alla riva, una distanza di $s = \sqrt{L^2 + (T v_F)^2} = L\sqrt{1 + (v_F/v_N)^2}$.

4. L'oggetto raggiunge il pavimento dell'ascensore nel tempo $t = \sqrt{2\,h/g}$, dove h indica l'altezza del soffitto dell'ascensore. In questo tempo l'ascensore è sceso di $v_0\,t$, da cui

$$s = v_0\,t + g\,t^2/2 = h + v_0\,t = h + v_0\sqrt{2\,h/g}\,.$$

5. **Fogli 1a e 1c**

   Essendo $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$, la condizione di minimo implica $v_z = 0$. Sapendo che tale condizione è raggiunta dopo il tempo t, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{v_0\,\sin\theta}{g} &= t \\ v_0\,\cos\theta &= v_{min}, \end{aligned}$$

   dalle quali $\tan\theta = g\,t/v_{min}$

   Fogli 1b e 1d

   Indicando con d e h distanza (sull'orizzontale) e altezza del bersaglio, le condizioni del problema sono

$$\begin{aligned} v_0\,\cos(\theta)\,t &= d \\ v_0\,\sin(\theta)\,t - g\,t^2/2 &= h\,. \end{aligned}$$

   Ricavandosi t dalla prima e sostituendolo nella seconda e sostituendo subito $\cos 45° = \sin 45° = \sqrt{2}/2$, si ottiene

$$v_0 = d\sqrt{\frac{g}{d-h}}$$

   (se $h > d$ il bersaglio non potrà mai essere colpito sparando a $45°$). Se $h = d$ la velocità deve essere "infinita" per non risentire minimamente dell'accelerazione di gravità.

6. Da a (data direttamente o da $F = ma$) e c, usando la formula $a = v^2/R$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
v &= \sqrt{a\,R} = \sqrt{\frac{a\,c}{2\pi}} \\
T &= \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{2\pi\,c}{a}}
\end{aligned}
$$

7. **Fogli 1a e 1c**

   Dopo il tempo τ il corpo P_1 ha percorso uno spazio pari a $s_1(\tau) = (1/2\,g\,\sin\theta)\tau^2$.

   - Se $s_1(\tau) \geq s_0$, l'incontro avviene nella posizione iniziale di $P2$, in quanto questo non ha tempo di muoversi.
   - Se $s_1(\tau) < s_0$, si consideri la velocità $v_1(\tau) = (g\,\sin\theta)\tau$. Conviene considerare l'evoluzione dei due corpi a partire dal tempo τ. Essi hanno stessa accelerazione, ma diversa velocità iniziale (rispettivamente $v_1(\tau)$ e 0). Quindi la loro velocità relativa rimarrà $v_1(\tau)$. Ne segue che l'incontro avverrà al tempo $t_i = ((s_0 - s_1(\tau))/v_1(\tau)$, nel punto $(1/2\,g\,\sin\theta)\,t_i^2$ da dove è partito P_2.

   Fogli 1b e 1d

   Chiamando v_0 la velocità iniziale e $a = g\,\sin\alpha$ lungo la guida, si ottiene che lo spazio percorso sulla guida è pari alla "solita" $s = v_0^2/(2\,a)$ (si lasciano i dettagli in quanto chi non riesce ad arrivare a questa formula ha grossi problemi di preparazione...). Ne segue la quota

$$
h = s\,\sin\alpha = \frac{v_0^2}{2\,g}.
$$