Capitolo 10

Funzioni di variabili casuali e teoremi limite

10.1 Propagazione delle incertezze

La condizione di incertezza su alcune grandezze si riflette in genere su ogni altra grandezza che sia funzione di esse. Ad esempio, immaginiamo di essere interessati all'area (A) e al perimetro (p) di un rettangolo (idealizzazione del piano di un tavolo), di cui sono stati misurati i due lati (a e b). L'inevitabile incertezza sul valore di a e di b (a cui andrebbe aggiunta quella legata al fatto che il quadrilatero potrebbe essere non perfettamente retto) si riflette su A e su p. Il termine con cui questo processo è noto è *propagazione delle incertezze*.

Come sappiamo, i gradi di fiducia sui possibili valori di a e di b sono espressi da $f(a)$ e $f(b)$. Ma, nel caso generale, i valori[1] di a e di b non sono indipendenti, come può succedere nel caso che i lati siano stati misurati con lo stesso strumento, non perfettamente calibrato[2]. Quindi, in genere bisognerà considerare la funzione congiunta $f(a,b)$. Per poter quantificare nel modo più generale l'incertezza su area e perimetro, bisogna imparare a valutare $f(A)$ e $f(p)$ partendo da $f(a,b)$ (o da $f(a)$ e $f(b)$ nel caso di indipendenza). In realtà, anche in questo caso, la soluzione più generale al problema si ottiene mediante il calcolo di $f(A,p)$. Infatti ci aspettiamo che A e p abbiano un certo grado di correlazione, in quanto sono calcolate dalle stesse informazioni di partenza. Riepilogando, il problema consiste nel valutare $f(A,p)$ a partire da $f(a,b)$:

$$f(a,b) \Rightarrow f(A,p)\,. \tag{10.1}$$

Come vedremo, il problema generale può diventare abbastanza complesso dal punto di vista del calcolo. Ci accontenteremo di calcolare soltanto previsione e incertezza di previsione delle varie grandezze e, qualora esistano correlazioni, del loro coefficiente di correlazione. Nella maggior parte dei casi pratici (e

[1]Si noti l'uso della stessa lettera sia per il nome della variabile che per i possibili valori. Quando si passa alle applicazioni può essere più importante usare gli stessi simboli sia per le grandezze che per le possibili realizzazioni. Quindi si raccomanda di abituarsi ad una certa flessibilità.

[2]Ritorneremo in dettaglio su tale effetto (vedi paragrafo 11.6) , ma si capisce che, ad esempio, se la misura sottostima a sottostimerà anche b.

"tranquilli") queste approssimazioni sono più che ragionevole e vedremo come esse ci permetteranno, sotto certe ipotesi spesso soddisfatte, di effettuare affermazioni probabilistiche sui valori delle grandezza. È comunque importante ricordarsi che, all'occorrenza, bisogna affrontare il problema nel modo più rigoroso, descritto da una generalizzazione della (10.1), che scriviamo con

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \xrightarrow[Y_j = Y_j(X_1, X_2, \ldots, X_n)]{} f(y_1, y_2, \ldots, y_m)\,, \qquad (10.2)$$

ove con $Y_j = Y_j(\cdots)$ è indicata la j-ma funzione che lega le n X_i alle m Y_j. La soluzione minimale che affronteremo nei dettagli sarà invece il solo caso di propagazione di previsione ed incertezza di combinazioni lineari di variabili:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{E}(X_i) \\ \sigma(X_i) \\ \rho(X_i, X_{i'}) \end{array} \right. \xrightarrow[Y_j = c_{j0} + c_{j1}X_1 + c_{j2}X_2 + \cdots + c_{jn}X_n]{} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{E}(Y_j) \\ \sigma(Y_j) \\ \rho(Y_j, Y_{j'}) \end{array} \right. \qquad (10.3)$$

A questo caso ci ridurremo, previe *linearizzazioni*, nel caso di funzioni qualsiasi (e nei limiti in cui le linearizzazioni siano ragionevoli).

I prossimi paragrafi, dedicati alla valutazione della distribuzione di probabilità di funzioni di variabili casuali, possono essere saltati da chi non è interessato a tale argomento. In tale caso si vada direttamente al paragrafo 10.6.

10.2 Soluzione generale per variabili discrete

Il caso di variabili discrete, benché di scarso interesse per le applicazioni di questo corso, è molto semplice, almeno dal punto di vista concettuale.

10.2.1 Regola generale

Consideriamo due variabili casuali di partenza, X e Y, e soltanto una variabile, Z, funzione di esse:

$$Z = g(X, Y)\,.$$

Cominciamo dal considerare il caso in cui Z assuma un certo valore z per la sola combinazione della variabili $X = x$ e $Y = y$. Chiaramente, la probabilità di $Z = z$ sarà uguale alla probabilità che si verifichino esattamente questi valori di X e di Y:

$$f(z) = P(Z = z) = P(X = x, Y = y) = f(x, y) \qquad \text{con } g(x, y) = z \qquad (10.4)$$

© G. D'Agostini 2000

Quando ci sono invece più coppie che contribuiscono al valore $Z = z$, bisogna sommare su tutte le loro probabilità:[3]

$$f(z) = \sum_{\substack{x,\,y \\ g(x,y)=z}} f(x,y) \tag{10.5}$$

Come esempio, si veda la somma degli esiti nel lancio di due dadi, già mostrato nel paragrafo 6.4 (vedi anche figura 6.2). Si noti come l'alta probabilità per valori centrali della somma sia dovuto soltanto al fatto che questi valori possono essere causati da più combinazioni di quelli estremi.

La (10.5) si estende facilmente al caso di più funzioni. Ad esempi, considerando anche la variabile $V = f(X, Y)$, la congiunta è data da:

$$f(z, v) = \sum_{\substack{x,\,y \\ g(x,y)=z \\ h(x,y)=v}} f(x,y) \tag{10.6}$$

Anche se l'impostazione della (10.6) è semplice, il calcolo che permette di ottenere delle formule analitiche può essere molto complicato, ben al di là dello scopo di questo corso. Vediamo soltanto nei prossimi paragrafi alcuni sottocasi molto istruttivi.

10.2.2 ❄ Convoluzione di due funzioni di probabilità

Consideriamo la variabile Z, somma di due variabili indipendenti X e Y. Applicando la regola generale otteniamo che

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{\substack{x,\,y \\ x+y=z}} f(x,y) && (10.7) \\ &= \sum_x f(x, z-y)\,. && (10.8) \end{aligned}$$

Nel caso di variabili indipendenti la (10.8) si riduce a

$$= \sum_x f(x) f(z-y)\,, \tag{10.9}$$

che rappresenta il caso discreto della *convoluzione* di due funzioni di probabilità indipendenti. La figura 10.1 mostra la distribuzione della somma di due variabili casuali uniformi associate agli esiti del lancio di due dadi. È anche mostrata la somma di tre dadi, la quale può essere interpretata come la somma di due dadi più un terzo dado. Si noti l'alta probabilità dei valori centrali e la bassa probabilità di quelli laterali.

[3] Dal punto di vista formale, la (10.5) equivale, per variabili a valori interi (ricordiamo che discreto non implica necessariamente intero) a

$$f(z) = \sum_{x,y} \delta_{z,g(x,y)} f(x,y)\,,$$

ove $\delta_{i,j}$ è la delta di Kronecker che vale 1 se $i = j$ e zero altrimenti.

© G. D'Agostini 2000

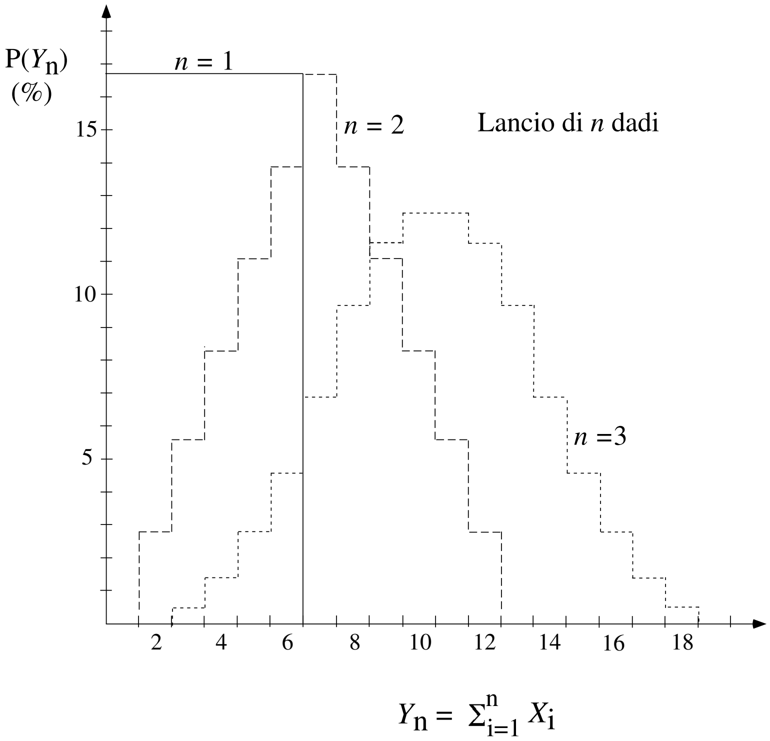

Figura 10.1: Distribuzione della somma dei risultati ottenuti dal lancio di n dadi. La concentrazione della probabilità al centro della distribuzione è dovuta all'elevato numero di combinazioni i quali producono risultati intermedi e giustifica qualitativamente il teorema del limite centrale.

Come esempio di applicazione della (10.9) consideriamo la somma di due variabili ciascuna delle quali è una distribuzione di Poisson, con parametri λ_1 e λ_2. Abbiamo già detto, basandoci su argomenti legati all'interpretazione fisica del processo di Poisson, che la distribuzione della somma è ancora una poissoniana di parametro $\lambda_1 + \lambda_2$. Utilizzando la (10.9) otteniamo:

$$f(z) = \sum_{x=0}^{z} f(x \,|\, \mathcal{P}_{\lambda_1}) f(z-x \,|\, \mathcal{P}_{\lambda_2})\,,$$

ove la sommatoria va da 0 a z in quanto $y = z - x$ non può assumere valori negativi. Esplicitando le funzioni si ottiene:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{x=0}^{z} \frac{e^{-\lambda_1}\lambda^x}{x!}\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{z-x}}{(z-x)!z!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^z}{z!}\sum_{x=0}^{z}\frac{z!}{(z-x)!z!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^x\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{z-x} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^z}{z!} = f(z \,|\, \mathcal{P}_{\lambda_1+\lambda_2})\,, \end{aligned} \tag{10.10}$$

Un esempio di questa tecnica è mostrato in figura 10.4, ove una variabile casuale X distribuita secondo una distribuzione normale di $\mu = 10$ e $\sigma = 2$ è generata $100\,000$ volte con la tecnica di Monte Carlo (vedi paragrafo 10.12) e successivamente trasformata in $Y = \sqrt{X}$, $1/X$ e X^2 (nell'ordine e come facilmente riconoscibile dai valori medi e deviazioni standard delle distribuzioni statistiche risultanti dalla simulazione).

10.6 Riepilogo di alcune proprietà delle funzioni di variabili casuali

Prima di proseguire è opportuno fare brevemente il punto della situazione riguardo le funzioni di variabili casuali. Questo dovrebbe permettere una agevole lettura dei paragrafi che seguono anche a coloro che hanno saltato i paragrafi precedenti.

- Il calcolo della forma della distribuzione di una funzione qualsiasi di variabili casuali è un problema complicato.

- Le applicazioni specifiche che incontremo, legate all'incertezza di misura, non richiedono tale abilità.

- Alcune distribuzioni godono della cosiddetta proprietà riproduttiva rispetto alla somma. In particolare, questo è vero per
  - la binomiale (vedi paragrafo 7.7);
  - la distribuzione di Poisson (ibidem);
  - la normale (vedi punto seguente);

- La distribuzione normale è anche riproduttiva sotto una qualsiasi combinazione lineare:

  > se n variabili indipendenti X_i sono distribuite normalmente con $\mathrm{E}(X_i) = \mu_i$ e $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2$, la variabile casuale $Y = \sum_i c_i X_i$ è ancora distribuita normalmente con $\mathrm{E}(Y) = \mu_Y = \sum_i c_i \mu_i$ e $\mathrm{Var}(Y) \sum_i c_i^2 \sigma_i^2$ (si noti il quadrato dei coefficienti).

- La somma di alcune distribuzioni può dar luogo ad altre distribuzioni notevoli. Il caso più semplice è quello che conduce alla binomiale partendo da tanti processi di Bernoulli indipendenti.

- La tabella 10.3 mostra alcuni esempi notevoli di somma di variabili indipendenti.

10.7 Valore atteso e varianza di combinazioni lineari

Sviluppiamo ora il programma illustrato all'inizio di questo capitolo e schematizzato nella (10.3). Calcoliamo quindi il valore atteso di una combinazione

© G. D'Agostini 2000

distribuzione degli addendi	distribuzione della somma
n Bernoulli, $\mathcal{B}_p$	binomiale, $\mathcal{B}_{n,p}$
binomiale, $\mathcal{B}_{n_i,p}$	binomiale, $\mathcal{B}_{\sum_i n_i,p}$
Poisson, $\mathcal{P}_{\lambda_i}$	Poisson, $\mathcal{P}_{\sum_i \lambda_i}$
normale, $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$	normale, $\mathcal{N}(\sum \mu_i, (\sum_i \sigma_i^2)^{\frac{1}{2}})$
k geometriche, $\mathcal{G}_p$	binomiale negativa, $\mathcal{B}^-_{k,p}$ (***)
k esponenziali, $\mathcal{E}_{r=1/\tau}$	Erlang(k,r) (***)

Tabella 10.3: Distribuzione della somma di variabili casuali indipendenti. Esempi notevoli.

lineare di variabili casuali, cominciando dal caso più semplice, quello della somma algebrica:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X \pm Y) &= \iint (x \pm y)\, f(x,y) dx dy \\ &= \iint x\, f(x,y) dx dy \pm \iint y\, f(x,y) dx dy \\ &= \mathrm{E}(X) \pm \mathrm{E}(Y)\,. \end{aligned} \tag{10.24}$$

Nel caso generale

$$\mathrm{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha\, \mathrm{E}(X) + \beta\, \mathrm{E}(Y)\,. \tag{10.25}$$

Avendo ottenuto il valore della previsione, interessiamoci all'incertezza di previsione, data dalla deviazione standard. Anche in questo caso cominciamo dalla somma algebrica:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X \pm Y) &= \mathrm{E}\left[((X \pm Y) - \mathrm{E}(X \pm Y))^2\right] \\ &= \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}(X)) \pm (Y - \mathrm{E}(Y))^2\right] \\ &= \mathrm{E}\Big[(X - \mathrm{E}(X))^2 + (Y - \mathrm{E}(Y))^2 \qquad (10.26) \\ &\qquad \pm 2\, (X - \mathrm{E}(X))\, (Y - E[Y])\Big] \\ &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\, \mathrm{Cov}(X,Y)\,. \qquad (10.27) \end{aligned}$$

Nel caso in cui la covarianza si annulla troviamo che la varianza di una somma o differenza di due variabili casuali è uguale alla somma delle varianze.

Utilizzando i simboli compatti di σ^2 per la varianza e σ_{XY} per la covarianza, possiamo riscrivere la 10.27 come

$$\sigma^2(X \pm Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \pm 2\, \sigma_{XY}\,. \tag{10.28}$$

Nel caso di una somma di n variabili $Y = \sum_i X_i$ otteniamo:

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_i \mathrm{E}(X_i) \tag{10.29}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \sum_i \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \tag{10.30}$$

© G. D'Agostini 2000

e, nella notazione simmetrica appena introdotta:

$$\sigma^2_Y = \sum_{ij} \sigma_{ij} \,, \tag{10.31}$$

ove $\sigma_{ii} = \sigma^2_{x_i}$ e $\sigma_{ij} = \text{Cov}(x_i, x_j)$. Consideriamo infine una combinazione lineare di due variabili $Y = a\,X_1 + b\,X_2 + c$:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \text{E}\left[(aX_1 + bX_2 + c - \text{E}[a\,X_1 + b\,X_2 + c])^2\right] \\ &= \text{E}\left[(a\,(X_1 - \text{E}(X_1)) + b\,(X_2 - \text{E}(X_2)))^2\right] \\ &= a^2\,\text{Var}(X) + b^2\,\text{Var}(X_2) + 2\,a\,b\,\text{Cov}(X_1, X_2)\,. \end{aligned} \tag{10.32}$$

Questo risultato può essere esteso a un numero qualsiasi di variabili:

$$\begin{aligned} Y &= \sum_i \alpha_i\,X_i \\ \text{E}(Y) &= \sum_i \alpha_i\;\text{E}(X_i) && (10.33) \\ \text{Var(Y)} &= \sum_i \alpha_i^2\,\text{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \alpha_i\,\alpha_j\,\text{Cov}(X_i, X_j) && (10.34) \end{aligned}$$

Possiamo riscrivere in modo più compatto l'espressione della covarianza, osservando innanzitutto che

$$2\sum_{i<j} \alpha_i\,\alpha_j\,\text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i\neq j} \alpha_i\,\alpha_j\,\text{Cov}(X_i, X_j)\,,$$

in quanto il fattore 2 è dovuto a considerare sia $i < j$ che $i > j$. Utilizzando inoltre la notazione compatta, questa può essere riscritta come

$$\sum_{i\neq j} \alpha_i\,\alpha_j \sigma_{ij}\,.$$

Anche i termini dovuti alle varianze possono essere riscritti come

$$\sum_i \alpha_i^2 \text{Var}(X_i) = \sum_i \alpha_i \alpha_i \sigma_i^2 = \sum_i \alpha_i \alpha_i \sigma_{ii}\,,$$

ove σ_{ii} sta per σ_i^2. Per concludere, il modo più compatto di scrivere la varianza di una combinazione lineare[8] è:

$$\sigma^2_Y = \sum_{ij} \alpha_i\,\alpha_j\,\sigma_{ij}\,. \tag{10.35}$$

[8]Siccome questa notazione presenta a volte difficoltà di interpretazione, facciamo un esempio nel caso di 2 variabili. La sommatoria $\sum_{ij}$ indica che bisogna considerare le $2 \times 2 = 4$ possibili combinazioni:

$$\{1,1\},\ \{1,2\},\ \{2,1\},\ \{2,2\}\,.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \sigma^2_Y &= \alpha_1\alpha_1\sigma_{1\,1} + \alpha_1\alpha_2\sigma_{1\,2} + \alpha_2\alpha_1\sigma_{2\,1} + \alpha_2\alpha_2\sigma_{2\,2} \\ &= \alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{1\,2}\,. \end{aligned}$$

(ricordiamo che $\sigma_{2\,1} = \sigma_{1\,2}$).

© G. D'Agostini 2000

Quindi, poiché come abbiamo visto, a partire da distribuzioni uniformi simili la convergenza è molto rapida, per il teorema del limite centrale

$$X \sim \mathcal{N}(0,1)\,.$$

Per ottenere qualsiasi altra distribuzione normale Y di parametri μ e σ è sufficiente effettuare la trasformazione

$$Y = \sigma\, X + \mu\,.$$

Un esempio di istogramma ottenuto con questo metodo è mostrato in figura 10.4 per $\mu = 10$ e $\sigma = 2$.

Si noti come, ovviamente, la tecnica non riproduce bene il comportamento delle code estreme, ma la si può migliorare aumentando il numero di termini della somma (e modificando opportunamente le formule).

10.13 ○ Linearizzazione

Una conseguenza importante delle proprietà della combinazione lineare e del teorema del limite centrale è la seguente: se si hanno delle variabili X_1, X_2, ... X_n e una variabile Y funzione arbitraria di esse, ovvero

$$Y = Y(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

che sia abbastanza lineare nell'intorno del valore atteso di ciascuna delle X_i (ovvero μ_i) ove si addensa il grosso della probabilità (ovvero entro qualche σ_i da μ_i) allora, espandendo Y in serie di Taylor otteniamo

$$\begin{aligned} Y &\approx Y(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) + \sum_i \frac{\partial Y}{\partial X_i}(X_i - \mu_i) &\quad (10.61)\\ &\approx k + \sum_i \frac{\partial Y}{\partial X_i} X_i\,, &\quad (10.62) \end{aligned}$$

ove le derivate si intendono calcolate per $X_i = \mu_i$. Il secondo modo di scrivere l'espansione, in cui sono stati inglobati in k tutti i termini non dipendenti da X_i, mostra chiaramente che la Y è una combinazione lineare delle X_i con coefficienti pari alle derivate calcolate nella previsione del vettore aleatorio $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$. Si possono applicare quindi a questa combinazione lineare ed ad altre combinazioni lineari costruite sulle X_i tutti i teoremi incontrati in questo capitolo. In particolare, abbiamo:

- la previsione di Y è circa uguale alla funzione Y calcolata sulle previsioni delle X_i:

$$\mathrm{E}(Y) \approx Y(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)\,, \qquad (10.63)$$

  come si può valutare rapidamente dalla (10.61) tenendo conto che $\mathrm{E}(X_i - \mu_i) = 0$;

- la varianza di Y è pari a

$$\sigma_Y^2 = \frac{\partial Y}{\partial X_i}\frac{\partial Y}{\partial X_j}\sigma_{ij}\,, \tag{10.64}$$

la quale si riduce, in caso di variabili X_i fra loro indipendenti a

$$\sigma_Y^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i}\right)^2 \sigma_i^2; \tag{10.65}$$

- la distribuzione di Y è circa normale in virtù del teorema del limite centrale e se sono valide le condizioni generali;
- nel caso di tante combinazioni lineari $Y_1(), Y_2(), \ldots\ Y_m()$ le covarianze fra le varie Y_l sono date da

$$\text{Cov}(Y_l, Y_m) = \sum_{ij}\frac{\partial Y_l}{\partial X_i}\frac{\partial Y_m}{\partial X_j}\sigma_{ij}\,. \tag{10.66}$$

10.14 ⥁ Esempio di applicazione alle incertezze di misure

Facciamo subito un esempio di come sia possibile applicare le proprietà delle combinazioni lineari e della linearizzazione alle incertezze di misure. Anche se non è stato ancora affrontato il discorso dell'inferenza statistica e di come si valutino le incertezze delle misure dirette e le correlazioni introdotte da possibili errori sistematici di entità incerta, supponiamo che siano stati misurati i due lati di un rettangolo e che i risultati siano presentati in termini di previsione e di incertezza di previsione:

$$\begin{aligned} a &= 29.71 \pm 0.03\text{cm} \\ b &= 21.44 \pm 0.03\text{cm}\,. \end{aligned}$$

Ripetendo quanto detto al momento di introdurre previsione e incertezza e incertezza di previsione: $\text{E}(a) = 29.71$ cm rappresenta il valore intorno al quale riteniamo che, ragionevolmente, si trovi a; $\sigma(a) = 0.03$ cm indica la dispersione dei valori che possono essere assunti da a intorno ad $\text{E}(a)$.

Immaginiamo di essere interessati ora alle seguenti grandezze derivate da a e b: perimetro ($p = 2\,a + 2\,b$); somma di lati ($s = a + b$); differenza dei lati ($d = a - b$); area del rettangolo ($A = a\,b$). Supponiamo inoltre i due casi: a) le misure di a e b sono assolutamente indipendenti, per cui $\rho(a,b) = 0$; b) parziale correlazione, con $\rho(a,b) = 0.5$; c) correlazione totale (positiva), con $\rho(a,b) = 1$.

Si riconoscono in p, s e d correlazioni lineari di a e b, mentre il caso dell'area è non lineare e va linearizzato. Riportiamo nel seguito i risultati dettagliati per s, d e A nei tre casi di correlazione considerati. Innanzitutto, le previsioni di s, d e A non dipendono da $\rho(a,b)$ e valgono

$$\begin{aligned} \text{E}(s) &= \text{E}(a) + \text{E}(b) && (10.67)\\ \text{E}(d) &= \text{E}(a) - \text{E}(b) && (10.68)\\ \text{E}(A) &\approx \text{E}(a)\cdot\text{E}(b)\,. && (10.69) \end{aligned}$$

© G. D'Agostini 2000

Per quanto riguarda le varianze, ricordando che Cov(a,b) è pari a $\rho(a,b)\,\sigma(a)\,\sigma(b)$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\sigma^2(s) &= \sigma^2(a) + \sigma^2(b) + 2\,\rho(a,b)\,\sigma(a)\,\sigma(b) & (10.70)\\
\sigma^2(d) &= \sigma^2(a) + \sigma^2(b) - 2\,\rho(a,b)\,\sigma(a)\,\sigma(b) & (10.71)\\
\sigma^2(A) &\approx b^2\sigma^2(a) + a^2\sigma^2(b) + 2\,a\,b\,\rho(a,b)\,\sigma(a)\,\sigma(b)\,. & (10.72)
\end{aligned}$$

Si noti il simbolo "$\approx$" al posto di "$=$" nel caso di A, per ricordare che si tratta di un risultato approssimato basato sulla linearizzazione. I risultati numerici sono:

$$\begin{aligned}
s/\text{cm} &= 51.15 \pm 0.04 && [\rho(a,b) = 0]\\
&\ 51.15 \pm 0.05 && [\rho(a,b) = 0.5]\\
&\ 51.15 \pm 0.06 && [\rho(a,b) = 1]\\
d/\text{cm} &= 51.15 \pm 0.04 && [\rho(a,b) = 0]\\
&\ 51.15 \pm 0.03 && [\rho(a,b) = 0.5]\\
&\ 51.15 \pm 0 && [\rho(a,b) = 1]\\
A/\text{cm}^2 &= 636.7 \pm 1.1 && [\rho(a,b) = 0]\\
&\ 636.7 \pm 1.3 && [\rho(a,b) = 0.5]\\
&\ 636.7 \pm 1.5 && [\rho(a,b) = 1]
\end{aligned}$$

Troviamo infine i coefficienti di correlazione fra s, d e A, come applicazione di quanto visto nel paragrafo 10.8. Utilizzando la formula (10.45), svolgendo in dettaglio il primo passaggio, otteniamo

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(s,d) &= (+1)\,(+1)\,\sigma^2(a) + (+1)\,(-1)\,\sigma^2(b) +\\
&\quad + [(+1)\,(-1) + (+1)\,(+1)]\,\rho(a,b)\,\sigma(a)\,\sigma(b)\\
\text{Cov}(s,A) &\approx (+1)\,(+b)\,\sigma^2(a) + (+1)\,(+a)\,\sigma^2(b) +\\
&\quad [(+1)\,(+a) + (+1)\,(+b)]\,\rho(a,b)\,\sigma(a)\,\sigma(b)\\
\text{Cov}(d,A) &\approx (+1)\,(+b)\,\sigma^2(a) + (-1)\,(+a)\,\sigma^2(b) +\\
&\quad [(+1)\,(+a) + (-1)\,(+b)]\,\rho(a,b)\,\sigma(a)\,\sigma(b)\,,
\end{aligned}$$

ove, di nuovo, "$\approx$" sta a ricordare che il risultato è basato sulla linearizzazione. Inserendo i valori e dividendo per le deviazione standard, otteniamo direttamente i coefficienti di correlazione in funzione di $\rho(a,b)$:

$$\begin{aligned}
\rho(s,d) &= 0 && \forall\,\rho(a,b)\\
\rho(s,A) &= 0.9871 && \rho(a,b) = 0\\
&= 0.9957 && \rho(a,b) = 0.5\\
&= 0.9999 && \rho(a,b) = 1.0\\
\rho(d,A) &= -0.160 && \rho(a,b) = 0\\
&= -0.093 && \rho(a,b) = 0.5\\
&= 0 && \rho(a,b) = 1\,.
\end{aligned}$$

Si noti:

© G. D'Agostini 2000