

DF 12 Giugno 2003

1. Chiamando R e T le ipotesi ‘moneta regolare’ e ‘moneta truccata’ le probabilità a priori sono $P(R|I) = 6/8$ e $P(T|I) = 2/8$, ove I indica lo stato di informazione di background. Chiamando X la variabile aleatoria ‘numero di volte che viene testa in $n = 4$ lanci’, abbiamo:

$$P(X = 3 | R, I) = f(3 | \mathcal{B}_{4,1/2}) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \quad (1)$$

$$P(X = 3 | T, I) = f(3 | \mathcal{B}_{4,0.9}) = \binom{4}{3} 0.9^3 0.1. \quad (2)$$

Da cui, applicando il teorema di Bayes, otteniamo il seguente rapporto di probabilità a posteriori

$$\frac{P(T | X = 3, I)}{P(R | X = 3, I)} = \frac{P(X = 3 | T, I)}{P(X = 3 | R, I)} \frac{P(T | I)}{P(R | I)} = \frac{0.9^3 0.1}{(1/2)^4} \frac{2/8}{6/8} = 1.166 \times 1/3 = 0.389, \quad (3)$$

ovvero $P(T | X = 3, I) = 0.280$.

2. In approssimazione normale e ipotizzando una prior uniforme per p , abbiamo:

$$E(p) \approx \frac{x}{n} \quad (4)$$

$$\sigma(p) \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{E(p) [1 - E(p)]}, \quad (5)$$

da cui

$$p_1 = 0.131 \pm 0.011 \quad (6)$$

$$p_2 = 0.143 \pm 0.008 \quad (7)$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 0.12 \pm 0.13 : \quad (8)$$

la differenza, tenuto conto dell'incertezza, non differisce molto da zero. L'interpretazione del risultato (6) è la seguente: tenuto conto delle varie ipotesi, riteniamo, con un livello di probabilità del 68%, che la proporzione della popolazione che risponderebbe affermativamente alla domanda sia compresa fra 0.120 e 0.142 (ovvero fra 0.109 e 0.153 al 95%, etc).

3. (a) Supponiamo che media e deviazione standard della distribuzione statistica di Δ siano, rispettivamente $\bar{\Delta} = 0.003$ mm e $s(\Delta) = 0.07$ mm. Se ipotizziamo un errore di lettura ϵ di valore atteso nullo e deviazione standard $\sigma(\epsilon)$, possiamo stimare $\sigma(\epsilon) \approx s(\Delta) = 0.07$ mm. (‘Volendo’, si potrebbe cambiare modello, ipotizzare un valore atteso $\neq 0$, ovvero un bias di lettura e associare $\bar{\Delta} = 0.003$ mm a questo bias: il problema è credere veramente che questo modello sia ragionevole).
- (b) Se $\sigma(\epsilon) \approx \sigma(\epsilon_N)$, ove $\sigma(\epsilon_N)$ indica la deviazione standard dell'errore associato alla lettura del nonio, $\epsilon_{tot} = \sqrt{\sigma^2(\epsilon) + \sigma^2(\epsilon_N)} \approx \sqrt{2} \sigma(\epsilon) \approx s\Delta$, ovvero $\sigma(\epsilon) \approx s(\Delta)/\sqrt{2} \approx 0.05$ mm.
- (c) Supponendo le due letture indipendenti, $\sigma(\Delta l) = \sqrt{2} \sigma(\epsilon) \approx 0.10$ mm $\Delta l = 0.2 \pm 0.1$.
4. Chiamando $\bar{a}$, $s(a)$ media e deviazione standard delle letture del lato a e usando analoga notazione per lato b e diagonale d : Assumiamo, come esempio pratico, i seguenti valori numerici in (vedi pag. 20 *Basi del Metodo Sperimentale*, studente V.P.), in cm e con tutte le cifre che dà il computer: $\bar{a} = 29.5205$, $s(a) = 0.0363971$; $\bar{b} = 20.907$, $s(b) = 0.0195192$; $\bar{d} = 36.1595$, $s(d) = 0.0369425$.

(a) $E(a) = \bar{a}$, $\sigma(a) = s(a)/\sqrt{n}$:

$$a = 29.521 \pm 0.008 \text{ cm} \quad (9)$$

$$b = 20.907 \pm 0.004 \text{ cm} . \quad (10)$$

(b) $\sigma'(a) = \sqrt{\sigma^2(a) + (E[a]\sigma_f)^2}$, con $\sigma_f = 0.0005$:

$$a = 29.521 \pm 0.017 \text{ cm} \quad [\text{ovvero } 29.52 \pm 0.02 \text{ cm}] \quad (11)$$

$$b = 20.907 \pm 0.011 \text{ cm} \quad [\text{ovvero } 20.91 \pm 0.01 \text{ cm}]. \quad (12)$$

(c) Dalle proprietà di valore atteso e varianza di combinazioni lineari di variabili casuali indipendenti (alle quali si perviene tramite approssimazione nei casi non lineari, si noti il simbolo “ $\approx$ ”):

$$E[p] = 2 (E[a] + E[b]) \quad (13)$$

$$\sigma^2(p) = 2 (\sigma^2(a) + \sigma^2(b)) \quad (14)$$

$$E[A] \approx E[a] \cdot E[b] \quad (15)$$

$$\sigma^2(A) \approx E^2[b] \sigma^2(a) + E^2[a] \sigma^2(b) \quad (16)$$

$$E[r] \approx \frac{E[b]}{E[a]} \quad (17)$$

$$\sigma^2(r) \approx \left(\frac{E[b]}{E^2[a]} \right)^2 \sigma^2(a) + \left(\frac{1}{E[a]} \right)^2 \sigma^2(b), \quad (18)$$

da cui

$$p = 100.855 \pm 0.018 \text{ cm} \quad (19)$$

$$A = 617.19 \pm 0.21 \text{ cm}^2 \quad (20)$$

$$r = 0.70822 \pm 0.0024 \text{ cm}. \quad (21)$$

(d) L'incertezze dovuta all'errore sistematico di scala, oltre che ad aumentare l'incertezza sui valori delle grandezze fisiche, rende le variabili aleatorie associate a tali valori non più indipendenti. Nella propagazione delle incertezze entrano quindi in gioco le covarianze. Per una trattazione elementare e orientata alle incertezze di misura, si veda la nota “*Probabilità e incertezze di misura: Rassegna critica e proposte per l'insegnamento*”. Qualitativamente: l'incertezza su p e A aumenta, quella su r rimane invariata in quanto l'errore sistematico (di entità incerta) cambia nello stesso modo numeratore e denominatore.

(e) Le misure dirette danno $d^{dir} = 36.160 \pm 0.008 \text{ cm}$, mentre indirettamente si ottiene $d^{ind} = \sqrt{a^2 + b^2} = 36.17 \pm 0.03 \text{ cm}$. $d^{ind} - d^{dir} = 0.01 \pm 0.03 \text{ cm}$.