G. D'Agostini

Integrale di Newton

(Fisica di Base 1, Corsi abilitanti, novembre 2006)

Strategia

Si tratta di sommare tutte le forze che agiscono su una massa di prova m 'puntiforme' (dimensioni trascurabili) dovute a tutti gli elementi di massa della Terra, modellizzata come una sfera omogenea di Raggio R_T e densità ρ.

Indichiamo con O il centro della Terra, O' la posizione di m, ovvero $\overline{O\,O'} = d$, distanza fra m e il centro della Terra.

Per eseguire il conto, sommiamo tutti i dischetti di spessore infinitesimo, ortogonali a $O\,O'$ e nella coordinata x a partire dal centro della Terra e rivolta verso O', ovvero $-R_T \leq x \leq R_T$. Ne segue che il dischetto in x dista $d-x$ da O'. Il raggio del disco dipende da x e vale $\sqrt{R_T^2 - x^2}$.

Ogni dischetto viene a sua volta diviso in anelli di raggio b. 'Sommando' (integrando) su tutti gli anelli per b fra 0 e $\sqrt{R_T^2 - x^2}$ otteniamo il contributo del dischetto in x. 'Sommando' su tutti i i dischetti otteniamo la forza totale.

Inoltre, per ogni anello quella che conta è soltanto la forza parallela ad $O\,O'$, in quanto i contributi normali si annullano a coppia.

Calcolo dell'integrale, $d \geq R_T$

Forza infinitesima dovuta ad anello in x, raggio b e spessori $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}b$:

$$\mathrm{d}F \;=\; \frac{G\,\rho\,(2\pi\,b\,\mathrm{d}b)\,\mathrm{d}x}{r^2}\,\frac{d-x}{r}\,. \tag{1}$$

ove: il segno della forza è positivo verso il centro della Terra; $r = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$ è la distanza fra m e di elementi di massa dell'anello; $\frac{d-x}{r}$ "è un coseno", che serve a selezionare la componente della forza lungo $O\,O'$.

Quindi si tratta di calcolare

$$F \;=\; \int_{x=-R_T}^{x=R_T}\int_{b=0}^{b=\sqrt{R_T^2-x^2}} \mathrm{d}F\,, \tag{2}$$

ovvero

$$\begin{aligned} F \;&=\; 2\pi\,\rho\,G\,m \int_{-R_T}^{R_T} \mathrm{d}x\,(d-x) \int_0^{\sqrt{R_T^2-x^2}} \mathrm{d}b\,\frac{b}{r^3} & (3)\\ &=\; 2\pi\,\rho\,G\,m \int_{-R_T}^{R_T} \mathrm{d}x\,(d-x)\,I_1\,, & (4)\end{aligned}$$

con

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\sqrt{R_T^2-x^2}} \mathrm{d}b\,\frac{b}{r^3} && (5)\\
&= \int_0^{\sqrt{R_T^2-x^2}} \mathrm{d}b\, b\,\left[b^2+(d-x)^2\right]^{-3/2} && (6)\\
&= (d-x)^{-1} - \left[R_T^2+d^2-2\,d\,x\right]^{-1/2}\,. && (7)
\end{aligned}
$$

Ovvero, la forza dovuta a ciascun dischetto in x e spessore dx vale

$$
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = 2\pi\,\rho\,G\,m\left[1-\frac{d-x}{\sqrt{R_T^2+d^2-2\,d\,x}}\right] \qquad (8)
$$

La forza totale è pari a

$$
\begin{aligned}
F &= 2\pi\,\rho\,G\,m\int_{-R_T}^{R_T}\mathrm{d}x\left[1-\frac{d-x}{\sqrt{R_T^2+d^2-2\,d\,x}}\right] && (9)\\
&= 2\pi\,\rho\,G\,m\left[2\,R_T-\int_{-R_T}^{R_T}\mathrm{d}x\frac{d-x}{\sqrt{R_T^2+d^2-2\,d\,x}}\right]\,. && (10)
\end{aligned}
$$

L'ultimo integrale è più complicato degli altri e lo facciamo fare a *Mathematica* (vedi 'notebook' sul sito del corso), ottenendo, per $d \geq R_T$:

$$
F = \frac{4\,\pi\,G\,\rho\,R_T^3}{3\,d^2} = \frac{G\,M\,m}{d^2} \qquad (11)
$$

Calcolo dell'integrale, caso particolare in cui $d = R_T$

Nel caso di massa m sulla superficie terrestre, ovvero $d = R_T$, anche l'ultimo integrale diventa facile

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-R_T}^{R_T}\frac{R_T-x}{\sqrt{2\,R_T^2-2\,R_T\,x}}\,\mathrm{d}x && (12)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\,R_T}}\int_{-R_T}^{R_T}\sqrt{R_T-x}\,\mathrm{d}x && (13)\\
&= \frac{4}{3}\,R\,, && (14)
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{4}{3}\,\rho\,G\,m\,R_T && (15)\\
&= \frac{4/3\,\rho\,G\,m\,R_T^3}{R_T} && (16)\\
&= \frac{G\,M_T\,m}{R_T^2} && (17)
\end{aligned}
$$

Calcolo dell'integrale, caso particolare in cui $d < R_T$

Per effettuare questo calcolo, utilizziamo ancora *Mathematica* (vedi notebook), imponendo, nelle semplificazioni $d < R_T$. Otteniamo in questo caso

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{4}{3}\rho\, G\, m\, d && (18)\\
&= \frac{4/3\, \rho\, G\, m\, d^3}{d^2} && (19)\\
&= \frac{G\, M(d)\, m}{d^2} && (20)
\end{aligned}
$$

ovvero, quello che conta è, in questo caso, la massa all'interno di una sfera di raggio d. Questo vuol dire che la massa di tutti i gusci sferici esterni a d danno contributo nullo e, per simmetria, è nullo il contributo di ciascun guscio.